

Řešení úloh krajského kola 67. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2025/2026

Kategorie E

FO67E3-1: Na dovolenou k moři

J. Thomas

- a) Označme celkovou dráhu jako s . Pak můžeme pro časy na první a druhé polovině cesty t_1 a t_2 psát

$$t = \frac{s}{v}, \quad t_1 = \frac{s/2}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s/2}{v_2}, \quad t = t_1 + t_2.$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{s}{v} = \frac{s/2}{v_1} + \frac{s/2}{v_2}, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2}, \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{2v_1} = \frac{1}{2v_2},$$

odkud vyjádříme

$$v_2 = \frac{vv_1}{2v_1 - v} = \frac{105 \text{ km/h} \cdot 70 \text{ km/h}}{2 \cdot 70 \text{ km/h} - 105 \text{ km/h}} = 210 \text{ km/h}.$$

Tato průměrná rychlost není reálná.

4 body

- b) Hledaný čas je rozdíl mezi skutečným časem a časem plánovaným. Na prvním úseku se auto pohybuje rychlostí v_1 , která je rovna $2/3$ plánované rychlosti v , proto bude čas na tomto úseku 1,5krát (= $3/2$ krát) větší, než čas plánovaný. Můžeme tedy napsat

$$t_3 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \right) - t = \frac{t}{4} = 0,25t. \quad \text{3 body}$$

- c) Na druhém úseku se auto pohybuje rychlostí v_3 , která je rovna $4/3$ plánované rychlosti v . Podobně jako v případě b) můžeme nyní napsat

$$t_4 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{t}{2} \right) - t = \frac{t}{8} = 0,125t. \quad \text{3 body}$$

Alternativní číselné řešení:

- a) Např. pro hodnotu $s = 420$ km, která přibližně odpovídá skutečné vzdálenosti, postupně vychází

$$t = \frac{420 \text{ km}}{105 \text{ km/h}} = 4,0 \text{ h}, \quad t_1 = \frac{420 \text{ km}/2}{70 \text{ km/h}} = \frac{210 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} = 3,0 \text{ h}.$$

Na druhou polovinu dráhy zbývá $t_2 = t - t_1 = 1,0$ h a rychlost v_2 tak vychází

$$v_2 = \frac{210 \text{ km}}{1,0 \text{ h}} = 210 \text{ km/h}.$$

- b) Čas na první polovině trasy úseku je podle části a) $t_1 = 3,0$ h, na druhé polovině

$$t'_2 = \frac{210 \text{ km}}{105 \text{ km/h}} = 2,0 \text{ h}.$$

Karel tedy musí vyjet dříve o

$$t_3 = t_1 + t'_2 - t = 3,0 \text{ h} + 2,0 \text{ h} - 4,0 \text{ h} = 1,0 \text{ h}.$$

Podělením zjistíme, že $t_3/t = 1,0 \text{ h}/4,0 \text{ h} = 1/4$, vychází tak $t_3 = t/4 = 0,25t$.

- c) Čas na prvním úseku je $t_1 = 3,0$ h, na druhém úseku

$$t''_2 = \frac{210 \text{ km}}{140 \text{ km/h}} = 1,5 \text{ h}.$$

Karel tedy pojede celkem $t_1 + t_2'' = 3,0 \text{ h} + 1,5 \text{ h} = 4,5 \text{ h}$. Přijede tedy o $t_4 = t_1 + t_2'' - t = 3,0 \text{ h} + 1,5 \text{ h} - 4,0 \text{ h} = 0,5 \text{ h}$ později. Podělením zjistíme, že $t_4/t = 0,5 \text{ h}/4,0 \text{ h} = 1/8$, vychází tak $t_4 = t/8 = 0,125t$.

Poznámka: Při číselném řešení doporučujeme tolerovat odchylku do 2 %, která může nastat v důsledku zaokrouhlování průběžných výpočtů.

FO67E3-2: Na Lipenské přehradě

J. Thomas

a) Objem krabice

$$V = abc = 45 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 33\,750 \text{ cm}^3 = 0,033\,75 \text{ m}^3 = 33,75 \text{ dm}^3.$$

Průměrná hustota pak vychází

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = \frac{47 \text{ kg}}{0,033\,75 \text{ m}^3} \approx 1\,392,6 \text{ kg/m}^3 \approx 1\,400 \text{ kg/m}^3; \quad (= 1,4 \text{ g/cm}^3).$$

2 body

b) Hydrostatický tlak v hloubce h pro hustotu vody ρ vychází

$$p_h = \rho gh = 1\,000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 15 \text{ m} = 147\,000 \text{ Pa} \approx 150 \text{ kPa} > p_a. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Na největší plochu krabice $S = 45 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 0,45 \text{ m} \cdot 0,30 \text{ m} = 0,1350 \text{ m}^2$ působí síla

$$F_1 = (p_h + p_a) S = (147\,000 \text{ Pa} + 101\,325 \text{ Pa}) \cdot 0,1350 \text{ m}^2 \approx 33\,524 \text{ N} \approx 34 \text{ kN}.$$

2 body

d) Při zvedání krabice ve vodě pomáhá potápěčům vztlaková síla

$$\begin{aligned} W_1 &= (mg - F_{vz}) h = (m - V\rho) gh = \\ &= (47 \text{ kg} - 0,033\,75 \text{ m}^3 \cdot 1\,000 \text{ kg/m}^3) \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 15 \text{ m} \approx 1\,947,8 \text{ J} \approx 1,9 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

2 body

Při zvedání na břehu se vykoná práce

$$W_2 = mgh_1 = 47 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 15 \text{ m} = 6\,909 \text{ J} \approx 6,9 \text{ kJ}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Pro poměr prací vychází

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{6\,909 \text{ J}}{1\,947,8 \text{ J}} \approx 3,5471 \approx 3,5. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Díky vztlakové síle je práce při zvedání ve vodě asi 3,5 menší než na břehu (při stejných výškách).

FO67E3-3: V koupelně*J. Thomas*

- a) Práce vykonaná za čas τ elektrickým proudem s účinností $\eta = 90\% = 0,90$ a výkonem $P = 1,5 \text{ kW} = 1500 \text{ W}$ bude rovna teplu na ohřátí vody ve zcela naplněném bojleru, tj. o objemu $50 \text{ l} = 0,050 \text{ m}^3$ z teploty $t_1 = 10^\circ\text{C}$ na $t_2 = 80^\circ\text{C}$; platí

$$\eta P \tau = V \rho c (t_2 - t_1).$$

Odtud vyjádříme hledanou dobu

$$\tau = \frac{V \rho c (t_2 - t_1)}{\eta P} = \frac{0,050 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 4200 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)} \cdot (80^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C})}{0,9 \cdot 1500 \text{ W}} \approx 10889 \text{ s} \approx 3,0247 \text{ h} \approx 3 \text{ h } 1,5 \text{ min.}$$

3 body

- b) Objem studené vody $V_1 = 2,0 \text{ l} = 0,020 \text{ m}^3$, objem teplé vody $V_2 = 5,0 \text{ l} = 0,050 \text{ m}^3$. Podle kalorimetrické rovnice teplo, které předává voda teplá je rovno teplu, které přijme voda studená, takže pro výslednou teplotu t platí

$$V_2 \rho c (t_2 - t) = V_1 \rho c (t - t_1),$$

odkud vyjádříme

$$t = \frac{V_1 t_1 + V_2 t_2}{V_1 + V_2} = \frac{0,020 \text{ m}^3 \cdot 10^\circ\text{C} + 0,050 \text{ m}^3 \cdot 80^\circ\text{C}}{0,020 \text{ m}^3 + 0,050 \text{ m}^3} = 60^\circ\text{C}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Poznámka: Vzhledem k podílu není nutné v tomto případě převádět litry na m^3 . Můžeme také využít znalosti, že 1 litr má při hustotě 1000 kg/m^3 hmotnost $1,0 \text{ kg}$ a počítat s hmotnostmi studené vody $m_1 = 2,0 \text{ kg}$ a teplé vody $m_2 = 5,0 \text{ kg}$; potom můžeme psát

$$m_2 c (t_2 - t) = m_1 c (t - t_1),$$

odkud vyjádříme

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{2,0 \text{ kg} \cdot 10^\circ\text{C} + 5,0 \text{ kg} \cdot 80^\circ\text{C}}{2,0 \text{ kg} + 5,0 \text{ kg}} = 60^\circ\text{C}.$$

- c) Teplé vody může být nejvýše 50 litrů (o hmotnosti $m_2 = 50 \text{ kg}$). V tomto případě potřebujeme ještě $80 \text{ litrů} - 50 \text{ litrů} = 30 \text{ litrů}$ studené vody (o hmotnosti $m_1 = 30 \text{ kg}$) a teplota ve vaně bude

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{30 \text{ kg} \cdot 10^\circ\text{C} + 50 \text{ kg} \cdot 80^\circ\text{C}}{30 \text{ kg} + 50 \text{ kg}} = 53,75^\circ\text{C}.$$

Požadavek je bohatě splněn a potřebujeme tedy méně než 50 litrů teplé vody. Musí platit $m_1 + m_2 = 80 \text{ kg}$. Při výsledné teplotě $t_3 = 38^\circ\text{C}$ můžeme psát

$$m_2 c (t_2 - t_3) = m_1 c (t_3 - t_1), \quad \implies \quad 42 m_2 = 28 m_1 \quad \implies \quad 3 m_2 = 2 m_1.$$

Objem 80 litrů musíme rozdělit v poměru

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3}; \quad V_1 = \frac{3}{5} \cdot 80 \text{ l} = 48 \text{ l studené a } V_2 = \frac{2}{5} \cdot 80 \text{ l} = 32 \text{ l teplé vody.}$$

4 body

Poznámka: Při známém součtu a poměru hmotností můžeme vyjádřit např. $m_2 = 2m_1/3$ a získáme rovnici

$$m_1 + \frac{2}{3} m_1 = \frac{5}{3} m_1 = 80 \text{ kg}, \quad \implies \quad m_1 = \frac{3}{5} 80 \text{ kg} = 48 \text{ kg}, \text{ což odpovídá objemu } 48 \text{ l.}$$

FO67E3-4: Sedm rezistorů*J. Thomas*

- a) Odpor rezistorů 1 a 2 je $2R$, odpor rezistorů 3, 4 a 5 je $3R$. V paralelním zapojení

$$\frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} = \frac{5}{6R}, \quad \implies \quad R_{12345} = \frac{6}{5}R = 1,2R.$$

Rezistor 6 je připojen sériově, proto $R_{123456} = R_{12345} + R = 1,2R + R = 2,2R = = \frac{11}{5}R$. Pro celkový odpor mezi body A a B pak platí

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{123456}} + \frac{1}{R} = \frac{5}{11R} + \frac{1}{R} = \frac{16}{11R},$$

odkud vyjádříme

$$R = \frac{16}{11}R_{AB} = \frac{16}{11} \cdot 220 \Omega = 320 \Omega. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Rezistorem R_7 prochází proud

$$I_7 = \frac{U}{R} = \frac{22 \text{ V}}{320 \Omega} = 0,06875 \text{ A} \approx 69 \text{ mA}. \quad \mathbf{0,5 \text{ bodu}}$$

Celkový proud protékající ze zdroje vychází

$$I = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{22 \text{ V}}{220 \Omega} = 0,10 \text{ A} \approx 100 \text{ mA}. \quad \mathbf{0,5 \text{ bodu}}$$

Šestým rezistorem tedy prochází proud $I_6 = I - I_7 = 0,10 \text{ A} - 0,06875 \text{ A} = = 0,03125 \text{ A} \approx 31 \text{ mA}$. $\mathbf{0,5 \text{ bodu}}$

Napětí na šestém rezistoru je $U_6 = R_6 I_6 = 320 \Omega \cdot 0,03125 \text{ A} = 10 \text{ V}$. $\mathbf{0,5 \text{ bodu}}$

Na rezistorech 1-2-3-4-5 je tedy napětí $U_{12345} = U - U_6 = 22 \text{ V} - 10 \text{ V} = 12 \text{ V}$.

Rezistory R_1 a R_2 prochází proud

$$I_{12} = \frac{U_{12345}}{2R} = \frac{12 \text{ V}}{2 \cdot 320 \Omega} = 0,01875 \text{ A} \approx 19 \text{ mA}. \quad \mathbf{0,5 \text{ bodu}}$$

Rezistory R_3 , R_4 a R_5 prochází proud

$$I_{345} = \frac{U_{12345}}{3R} = \frac{12 \text{ V}}{3 \cdot 320 \Omega} = 0,0125 \text{ A} \approx 13 \text{ mA}. \quad \mathbf{0,5 \text{ bodu}}$$

Napětí na rezistoru R_1 i rezistoru R_2 je $U_1 = U_2 = U_{12345}/2 = 12 \text{ V}/2 = 6,0 \text{ V}$. $\mathbf{0,5 \text{ bodu}}$

Napětí na jednotlivých rezistorech R_3 , R_4 a R_5 je $U_3 = U_4 = U_5 = U_{12345}/3 = = 12 \text{ V}/3 = 4,0 \text{ V}$. $\mathbf{0,5 \text{ bodu}}$

Poznámka: Napětí na rezistorech lze spočítat i pomocí proudu a odporu, např. $U_1 = RI_{12} = 320 \Omega \cdot 0,01875 \text{ A} = 6,0 \text{ V}$ nebo $U_3 = RI_{345} = 320 \Omega \cdot 0,0125 \text{ A} = = 4,0 \text{ V}$.

- c) Nejvíce se bude zahřívat rezistor R_7 , protože jím prochází největší proud a uvolněné teplo závisí na druhé mocnině proudu. $\mathbf{2 \text{ body}}$

Uurčíme-li teplo, uvolněné za sekundu číselně (tj. vlastně tepelný výkon), vychází

$$Q_7 = RI_7^2 t = 320 \Omega \cdot (0,06875 \text{ A})^2 \cdot 1,0 \text{ s} = 1,5125 \text{ J} \approx 1,5 \text{ J}.$$

I když to není požadováno, pro úplnost doplníme hodnoty pro další rezistory

$$Q_1 = Q_2 = RI_{12}^2 t = 320 \Omega \cdot (0,01875 \text{ A})^2 \cdot 1,0 \text{ s} = 0,1125 \text{ J} \approx 0,11 \text{ J},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = RI_{345}^2 t = 320 \Omega \cdot (0,0125 \text{ A})^2 \cdot 1,0 \text{ s} = 0,050 \text{ J},$$

$$Q_6 = RI_6^2 t = 320 \Omega \cdot (0,03125 \text{ A})^2 \cdot 1,0 \text{ s} = 0,3125 \text{ J} \approx 0,31 \text{ J}.$$