Řešení úloh 2. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Úlohy navrhl J. Jírů

1. Převedeme $t_1 = 28$ min 40 s $= \frac{43}{90}$ h $= 1\ 720$ s.

a) Průměrná rychlost Dušana je

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{5{,}64\ \text{km}}{\dfrac{43}{90}\ \text{h}} = 11{,}8\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} > v_2.$$

Větší průměrnou rychlost měl Dušan. **2 body**

b) Pro Pavlovu trasu platí:

$$h - h_2 = k_2 s_2 \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{h-h_2}{k_2} = \frac{(890-517)\ \text{m}}{0{,}07} = 5{,}329\ \text{km},$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{5{,}329\ \text{km}}{11{,}3\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}} = 0{,}472\ \text{h} = 28{,}3\ \text{min} = 1700\ \text{s} < t_1.$$

Do cíle dříve dorazil Pavel. **3 body**

c) Průměrné stoupání Dušanovy trasy je

$$k_1 = \frac{h-h_1}{s_1} = \frac{890-575}{5\ 640} = 0{,}055\,9 = 5{,}59\ \% < k_2.$$

Větší průměrné stoupání na trase měl Pavel. **1 bod**

d) Výkon Dušana

$$P_1 = \frac{m_1 g\,(h-h_1)}{t_1} = \frac{78\cdot 9{,}81\cdot(890-575)\ \text{J}}{1\,720\ \text{s}} = 140\ \text{W}.$$

Výkon Pavla

$$P_2 = \frac{m_2 g\,(h-h_2)}{t_2} = \frac{74\cdot 9{,}81\cdot(890-517)\ \text{J}}{1\,700\ \text{s}} = 160\ \text{W} \ > \ P_1.$$

Větší průměrný výkon měl Pavel. **4 body**

2. a) Vykonáme stejně velkou práci, jako je práce spotřebovaná třecí silou:

$$W = F_t d = fmgd = 0{,}24\cdot 2{,}2\cdot 9{,}81\cdot 4\ \text{J} = 21\ \text{J}.$$

2 body

b) Z kinematických vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb na dráze d_1 získáme velikost a_1 zrychlení

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}a_1\left(\frac{v_1}{a_1}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2a_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{v_1^2}{2d_1}.$$

Potřebná síla kompenzuje třecí sílu a trámek urychluje. Její velikost je

$$F = fmg + ma_1 = m\left(fg + \frac{v_1^2}{2d_1}\right) = 2{,}2\cdot\left(0{,}24\cdot 9{,}81 + \frac{4{,}2^2}{2\cdot 0{,}9}\right)\ \text{N} = 27\ \text{N}.$$

4 body

Jiná možnost řešení: Na dráze d_1 vykoná síla o velikosti F práci W_1, která je zčásti spotřebována třecí silou k zahřátí třecích ploch a zčásti se využije k získání kinetické energie trámku:

$$W_1 = fmgd_1 + \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$F = \frac{W_1}{d_1} = m\left(fg + \frac{v_1^2}{2d_1}\right).$$

c) Trámek koná rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F_t}{m} = \frac{fmg}{m} = fg.$$

Z počáteční rychlosti v_1 urazí dráhu

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{v_1^2}{2fg} = \frac{4{,}2^2}{2 \cdot 0{,}24 \cdot 9{,}81}\ \mathrm{m} = 3{,}75\ \mathrm{m}.$$

V krajní poloze může trámek přesahovat přes hranu až polovinou své délky, proto ujetá dráha může být nejvýše,

$$s_{\max} = d - d_1 + \frac{l}{2} = \left(4 - 0{,}9 + \frac{1{,}5}{2}\right)\ \mathrm{m} = 3{,}85\ \mathrm{m}.$$

Jelikož $s < s_{\max}$, trámek po zastavení zůstane na plošině. **4 body**

Jiná možnost nalezení brzdné dráhy s je pomocí práce W spotřebované třecí silou. Tato práce je rovna počáteční kinetické energii trámku:

$$W = fmg \cdot s = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad s = \frac{v_1^2}{2fg}.$$

3.a) Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie, a to porovnáním potenciální energie v počáteční poloze s kinetickou energií při průchodu nejnižší polohou:

$$3mg \cdot 2r + mg \cdot 4r = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad 20gr = 3v_1^2 + v_2^2.$$

Každou obvodovou rychlost vyjádříme pomocí společné úhlové rychlosti

$$v_1 = r\omega, \quad v_2 = 2r\omega.$$

Po dosazení dostaneme

$$20gr = 3r^2\omega^2 + 4r^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad 20g = 7r\omega^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{20g}{7r}} = 9{,}7\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

3 body

Pro obvodové rychlosti pak platí

$$v_1 = r\omega = r\sqrt{\frac{20g}{7r}} = \sqrt{\frac{20}{7}gr} = 2{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v_2 = 2r\omega = 2v_1 = 2\sqrt{\frac{20}{7}gr} = 5{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Vyjádříme např. změnu mechanické energie jako rozdíl konečné kinetické energie a počáteční potenciální energie první kuličky:

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v_1^2 - 3mg \cdot 2r = \frac{3}{2}m \cdot \frac{20}{7}gr - 6mgr = -\frac{12}{7}mgr < 0.$$

Záporná změna znamená úbytek mechanické energie, tedy první kulička předala druhé kuličce mechanickou energii $\frac{12}{7}mgr$.

2 body

(V případě druhé kuličky je změna mechanické energie

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mg \cdot 4r = \frac{1}{2}m \cdot \frac{80}{7}gr - 4mgr = \frac{12}{7}mgr > 0.$$

Kladná změna znamená přírůstek mechanické energie, tedy druhá kulička přijala od první kuličky stejně velkou mechanickou energii.)

c) Na osu otáčení působí ve svislém směru dolů tíhová síla a odstředivá síla každé kuličky. Velikost výsledné síly je

$$F = 3mg + mg + 3m \cdot r \cdot \omega^2 + m \cdot 2r \cdot \omega^2 = 4mg + 5mr\omega^2 = 4mg + 5mr\frac{20g}{7r} = \frac{128}{7}mg.$$

3 body

4.a) Podle zákona zachování hybnosti je hybnost soustavy bruslařů stejná před odstrčením i po odstrčení:

$(m_1 + m_2)\, v = 0 + m_2 v_2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v = \frac{50 + 70}{70} \cdot 0{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Bruslaři vykonali práci, která je rovna přírůstku kinetické energie bruslařů. Kinetická energie soustavy bruslařů před odstrčením je

$$E_k = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v^2,$$

po odstrčení

$$E_k' = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 \cdot \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^2}v^2 = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2m_2}v^2.$$

Bruslaři vykonali práci

$$W = E_k' - E_k = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2m_2}v^2 - \frac{m_1 + m_2}{2}v^2 =$$

$$= \frac{m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 - m_1m_2 - m_2^2}{2m_2}v^2 =$$

$$= \frac{m_1\,(m_1 + m_2)}{2m_2}v^2 = \frac{50(50 + 70)}{2 \cdot 70}\,\text{kg} \cdot 0{,}9^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 35 \text{ J}.$$

4 body

c) Žofka jedoucí vzadu má po odstrčení obecně dvě možnosti směru pohybu, zatímco směr pohybu Milana je po odstrčení shodný s původním směrem pohybu. Proto od velikostí v, v_1', v_2' jednotlivých rychlostí přejdeme k jejich souřadnicím v_x, v_{x1}', v_{x2}', kde zvolíme směr osy x totožný se směrem pohybu, tj. zvolíme

$v_x > 0$ a $v'_{x2} > 0$. Pak platí
$(m_1 + m_2)\, v_x = m_1 v'_{x1} + m_2 v'_{x2} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad v'_{x1} = \frac{(m_1 + m_2)\, v_x - m_2 v_{x2}}{m_1} = \frac{120 \cdot 0{,}9 - 70 \cdot 2}{50} = -0{,}64 \ \ \mathrm{m \cdot \ s^{-1}}.$$

Žofka se po odstrčení pohybuje v opačném směru rychlostí o velikosti $v'_1 = 0{,}64 \ \ \mathrm{m \cdot \ s^{-1}}$. **2 body**

d) Použijeme stejnou výchozí rovnici

$$(m_1 + m_2)\, v_x = m_1 v''_{x1} + m_2 v''_{x2},$$

v níž platí $v''_{x1} = -v_x$. Po dosazení dostaneme
$(m_1 + m_2)\, v_x = -m_1 v_x + m_2 v''_{x2} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad v''_{x2} = \frac{2m_1 + m_2}{m_2} v_x = \tfrac{170}{70} \cdot 0{,}9 = 2{,}2 \ \ \mathrm{m \cdot \ s^{-1}}.$$

Milan se po odstrčení pohybuje v původním směru rychlostí o velikosti $v''_2 = 2{,}2 \ \ \mathrm{m \cdot \ s^{-1}}$. **2 body**

Poznámka: Řešení částí c) a d) lze považovat za správné i v případě, kdy řešitel použije výchozí rovnice s velikostmi rychlostí, tj. c) $(m_1 + m_2)\, v = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$, d) $(m_1 + m_2)\, v = -m_1 v + m_2 v''_2$. Záporný výsledek v c) $v'_1 = -0{,}64 \ \ \mathrm{m \cdot \ s^{-1}}$ však musí být interpretován jako pohyb v opačném směru.