Řešení úloh 1. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Úlohy navrhl J. Jírů

1.a) $t_0 = 16 : 48\ \text{min} = 1\ 008\ \text{s}\ = \frac{7}{25}\ \text{h} =\ 0{,}28\ \text{h}$ (přesně).
Označme s_J Jendovu dráhu do setkání a s_K Kamilovu dráhu do setkání. Celková délka okruhu je jejich součtem:
$s = s_\text{J} + s_\text{K} = v_\text{J1}t_0 + v_\text{K1}t_0 = (v_\text{J1} + v_\text{K1})\, t_0 = (20 + 25) \cdot 0{,}28\ \text{km}\ =\ 12{,}60\ \text{km}.$

2 body

b) V druhé části jízdy si cyklisté vyměnili dráhy. Jenda se pohyboval rychlostí v_J2 po dráze

$$s_K = v_\text{K1}t_0 = 25 \cdot 0{,}28\ \text{km} = 7{,}00\ \text{km},$$

jeho čas je

$$t_J = \frac{s_K}{v_\text{J2}} = \frac{7}{21}\ \text{h} = \frac{1}{3}\ \text{h} = 1\ 200\ \text{s}.$$

Kamil se pohyboval rychlostí v_K2 po dráze

$$s_J = v_\text{J1}t_0 = 20 \cdot 0{,}28\ \text{km} = 5{,}60\ \text{km},$$

jeho čas je

$$t_K = \frac{s_\text{J}}{v_\text{K2}} = \frac{5{,}6}{18}\ \text{h} = \frac{14}{45}\ \text{h} = 1\ 120\ \text{s}.$$

Časový odstup cyklistů v cíli je rozdíl časů na druhých úsecích.

$$\Delta t = t_\text{J} - t_\text{K} = 80\ \text{s}.$$

Do cíle dříve dorazil Kamil s náskokem 80 s. **4 body**

c) Průměrná rychlost na okruhu je podíl celkové dráhy a celkového času:

$$v_\text{J} = \frac{s}{t_0 + t_\text{J}} = \frac{12{,}6}{\frac{7}{25} + \frac{1}{3}}\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 20{,}54\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1},$$

$$v_\text{K} = \frac{s}{t_0 + t_\text{K}} = \frac{12{,}6}{\frac{7}{25} + \frac{14}{45}}\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 21{,}32\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

4 body

Poznámka: Budeme-li úlohu řešit obecně, pak dostaneme:
b) $\Delta t = t_\text{J} - t_\text{K} = \left(\frac{v_\text{K1}}{v_\text{J2}} - \frac{v_\text{J1}}{v_\text{K2}}\right) t_0,$

c) $v_\text{J} = \frac{v_\text{J2}\,(v_\text{J1} + v_\text{K1})}{v_\text{J2} + v_\text{K1}},\ v_\text{K} = \frac{v_\text{K2}\,(v_\text{J1} + v_\text{K1})}{v_\text{K2} + v_\text{J1}}.$

2.a) Pro dobu t volného pádu z výšky h platí:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Míček uvolněný Natálií dopadne v čase

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1{,}81\ \mathrm{s}.$$

Míček uvolněný Václavem dopadne v čase

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2{,}41\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Aby míčky dopadly ve stejném okamžiku, musí Natálie míček uvolnit o takovou dobu později, o kterou její míček dopadl dříve. Čas uvolnění míčku je

$$t_0 = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} - \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right) = 0{,}60\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) Okamžitou výšku h míčku v čase t měřeném od okamžiku uvolnění získáme ze vztahu

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde h_0 je počáteční výška. Pro ruční sestrojení grafu zapíšeme hodnoty do tabulky:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$\frac{h_\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$	28,4	28,2	27,6	26,6	25,3	23,5	21,3	18,8	15,8	12,5	8,8	4,7	0,1
$\frac{h_\mathrm{N1}}{\mathrm{m}}$	16,0	15,8	15,2	14,2	12,9	11,1	8,9	6,4	3,4	0,1	0	0	0
$\frac{h_\mathrm{N2}}{\mathrm{m}}$	16,0	16,0	16,0	16,0	15,8	15,2	14,2	12,9	11,1	8,9	6,4	3,4	0,1

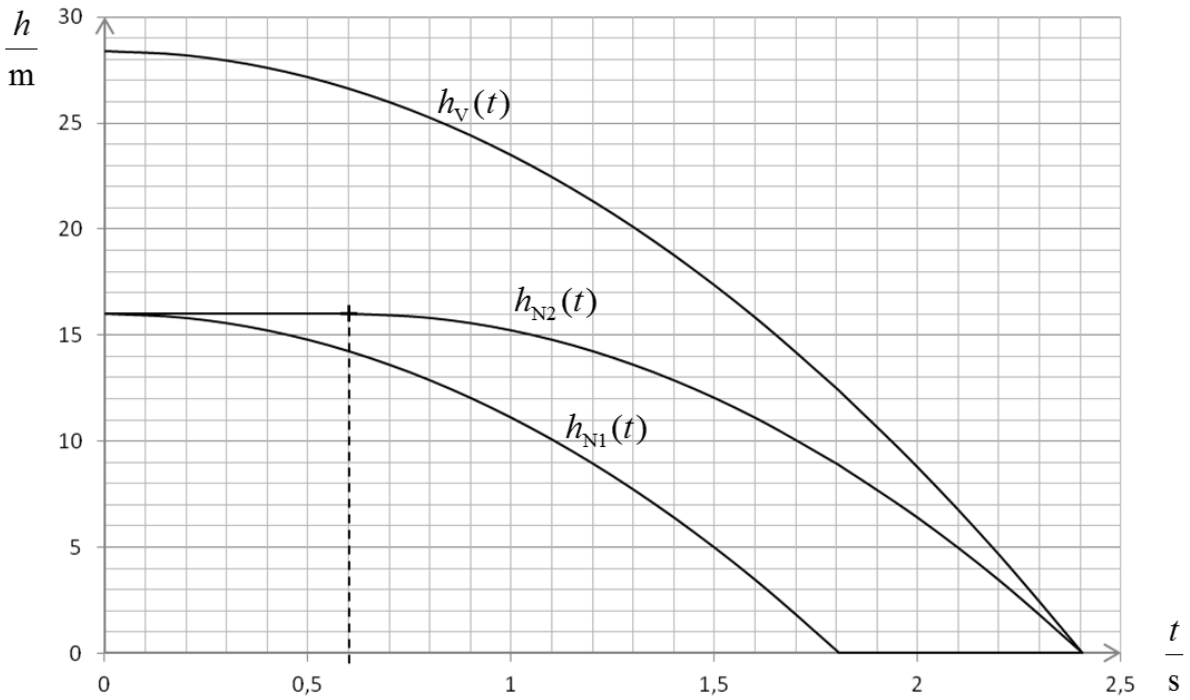
V Excelu využijeme rovnice

$$h_V = h_2 - \frac{1}{2}gt^2 = \left(28{,}4 - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \{t\}^2\right)\mathrm{m} \text{ pro } t \in \langle 0;\ 2{,}41\ \mathrm{s}\rangle\,,$$

$$h_\mathrm{N1} = h_1 - \frac{1}{2}gt^2 = \left(16 - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \{t\}^2\right)\mathrm{m} \text{ pro } t \in \langle 0;\ 1{,}81\ \mathrm{s}\rangle\,,$$

$$h_\mathrm{N2} = h_1 = 16\ \mathrm{m} \text{ pro } t \in \langle 0;\ 0{,}60\ \mathrm{s}\rangle\,,$$

$$h_\mathrm{N2} = h_1 - \frac{1}{2}g\left(t - t_0\right)^2 = \left(16 - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot (\{t\} - 0{,}6)^2\right)\mathrm{m} \text{ pro } t \in \langle 0{,}60\ \mathrm{s};\ 2{,}41\ \mathrm{s}\rangle\,.$$



5 bodů

3.a) Doba jízdy vlaku rovnoměrným pohybem je

$$t_0 = \frac{s}{v} = \frac{13\ 276}{\frac{200}{3{,}6}}\ \mathrm{s} = 239\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{min}\ 59\ \mathrm{s}.$$

2 body

b) Z rovnic pro rozjezdový úsek

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at,$$

vyloučením doby t rozjíždění dostaneme

$$s_1 = \frac{v^2}{2a}.$$

Celková doba jízdy na okruhu je součtem doby t rozjíždění a doby t' rovnoměrného pohybu na zbývající části okruhu:

$$t_1 = t + t' = \frac{v}{a} + \frac{s - s_1}{v} = \frac{v}{a} + \frac{s - \frac{v^2}{2a}}{v} = \frac{v}{a} + \frac{s}{v} - \frac{v}{2a} = \frac{s}{v} + \frac{v}{2a} = \frac{2as + v^2}{2av} =$$

$$= 282\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{min}\ 42\ \mathrm{s}.$$

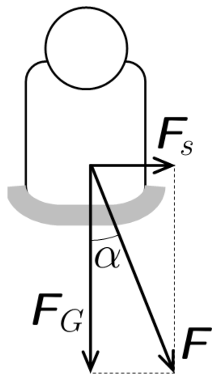
4 body

c) Úhlová rychlost vlaku při půjezdu obloukem je

$$\omega = \frac{v}{r} = 0{,}039\,7\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 136^\circ \cdot \mathrm{min}^{-1}.$$

2 body

d) Pro setrvačnou odstředivou sílu $\boldsymbol{F}_s$ působící na cestujícího o hmotnosti m platí



$$\boldsymbol{F}_s = -m\boldsymbol{a}_d, \quad F_s = ma_d = m\frac{v^2}{r}.$$

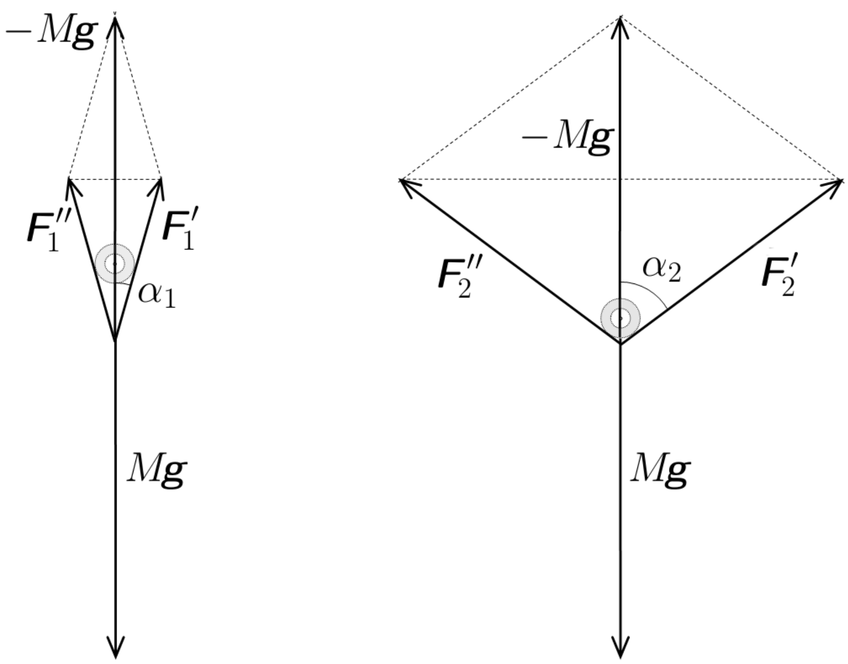
Z vektorového diagramu plyne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_s}{F_G} = \frac{ma_d}{mg} = \frac{v^2}{gr} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 13°.$$

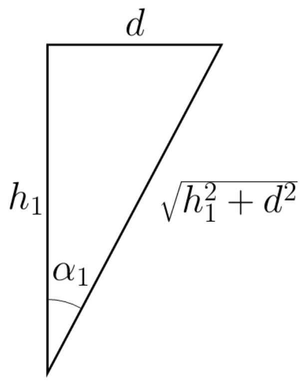
2 body

Poznámka: Přechodové úseky slouží k plynulé změně normálového zrychlení mezi nulovým dostředivým zrychlením v přímém úseku a dostředivým zrychlením v kruhovém oblouku. Stejně tak v silničním provozu změna směru jízdy do zatáčky a naopak do přímého směru probíhá plynulým pohybem volantu mezi jeho polohami v přímé jízdě a v kruhovém oblouku, tedy nikoliv „cuknutím“ volantu z jedné polohy do druhé. U jednostopých vozidel se kromě plynulé změny polohy řídítek plynule mění též náklon do zatáčky.

4. a)



Na břemeno působí tíhová síla $M\boldsymbol{g}$ a části lana silami $\boldsymbol{F}_1'$ a $\boldsymbol{F}''_1$, přičemž $F_1' = F_1'' = F_1$. Síly posuneme po svých vektorových přímkách do společného působiště pod kladku. Z rovnoběžníku sil plyne



$$\cos\alpha_1 = \frac{Mg}{2F_1} \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{Mg}{2\cos\alpha_1},$$

kde

$$\cos\alpha_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + d^2}}.$$

Dosazením dostaneme

$$F_1 = \frac{\sqrt{h_1^2 + d^2}}{2h_1} Mg = \frac{\sqrt{5^2 + 1{,}2^2}}{2 \cdot 5} \cdot 75 \cdot 9{,}81 \text{ N} = 0{,}51 Mg = 380 \text{ N}.$$

4 body

b) V horní poloze na břemeno působí opět tíhová síla $M\boldsymbol{g}$ a části lana silami $\boldsymbol{F}_2'$ a $\boldsymbol{F}_2''$, přičemž $F_2' = F_2'' = mg$. Síly posuneme po svých vektorových přímkách do společného působiště pod kladku. Z rovnoběžníku sil plyne

$$\cos\alpha_2 = \frac{Mg}{2F_2'} = \frac{Mg}{2mg} = \frac{M}{2m},$$

kde

$$\cos\alpha_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + d^2}}.$$

Z rovnosti pravých stran dostaneme

$$\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + d^2}} = \frac{M}{2m} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_2^2}{h_2^2 + d^2} = \frac{M^2}{4m^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h_2 = \frac{M}{\sqrt{4m^2 - M^2}} d = \frac{75}{\sqrt{4 \cdot 60^2 - 75^2}} \cdot 1{,}2 \text{ m} = 0{,}96 \text{ m}.$$

4 body

c) Chlapec může na konec lana působit silou o maximální velikosti mg. Do výsledku části a) stačí dosadit $F_1 = mg$ a $M = M'$:

$$mg = \frac{\sqrt{h_1^2 + d^2}}{2h_1} M'g \quad \Rightarrow \quad M' = \frac{2h_1}{\sqrt{h_1^2 + d^2}} m = 1{,}94 m = 117 \text{ kg}.$$

2 body

5.a) Ze zákona zachování hybnosti při dokonale nepružném rázu

$$m_0 v_0 = (m_0 + m_1 + m_2)\, u$$

plyne

$$u = \frac{m_0}{m_0 + m_1 + m_2} v_0 = \frac{30}{30 + 26 + 40} v_0 = \frac{5}{16} v_0 = 0{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Po první srážce získá dvojice vagónů rychlost w_1:

$$m_0 v_0 = (m_0 + m_1)\, w_1 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_0.$$

Po druhé srážce získá celá souprava rychlost w:

$$(m_0 + m_1)\, w_1 = (m_0 + m_1 + m_2)\, w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} w_1 =$$

$$= \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1 + m_2} v_0 = u = 0{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Konečná rychlost při postupné srážce zůstala stejná jako v případě srážky najednou.

3 body

c) Označme M hmotnost celé soupravy. V obou případech platí

$$E_k - E_k' = \frac{1}{2}m_0v_0^2 - \frac{1}{2}Mu_2^2 = \frac{1}{2}m_0v_0^2 - \frac{1}{2}M\frac{m_0^2}{M^2}v_0^2 = \frac{1}{2}m_0v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{m_0^2}{M}v_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_0v_0^2\left(1 - \frac{m_0}{m_0+m_1+m_2}\right) = \frac{1}{2}m_0v_0^2 \cdot \frac{m_1+m_2}{m_0+m_1+m_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30\,000 \cdot 2{,}4^2 \cdot \frac{26+40}{30+26+40}\ \mathrm{J} = 59\,400\ \mathrm{J}.$$

3 body

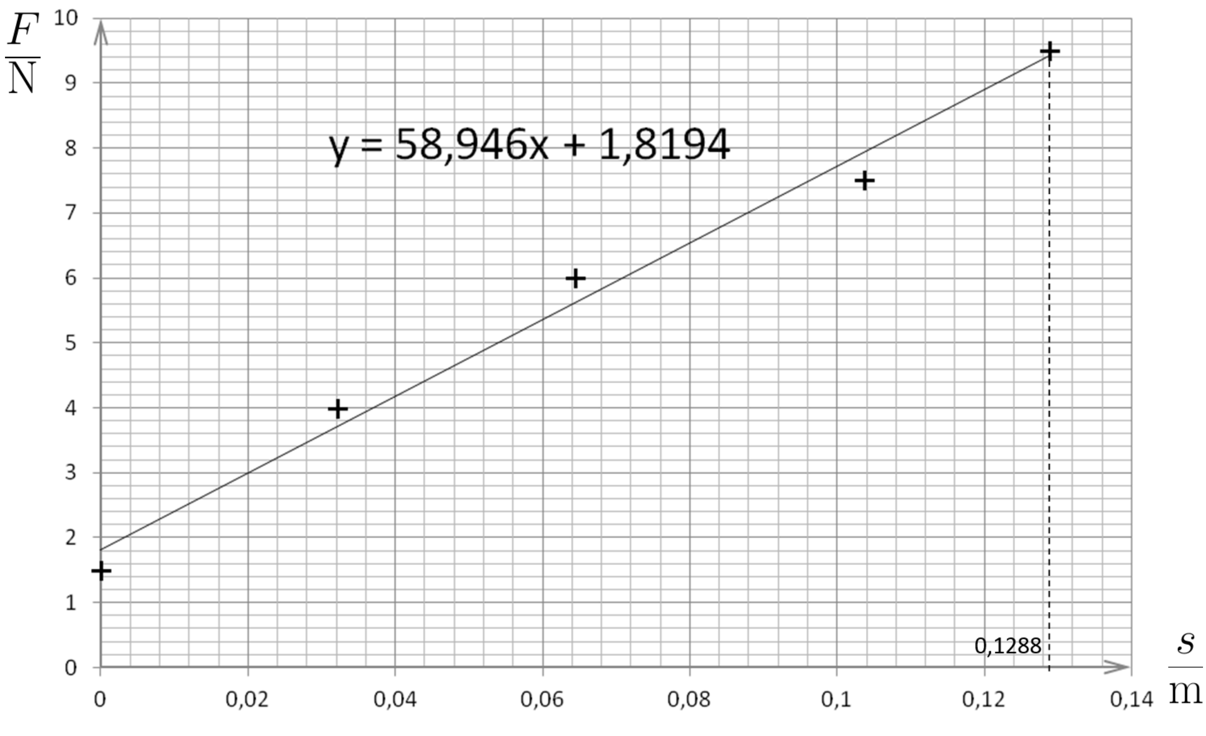
$$\frac{E_k'}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}(m_0+m_1+m_2)\,u_2^2}{\frac{1}{2}m_0v_0^2} = \frac{M\frac{m_0^2}{M^2}v_0^2}{m_0v_0^2} = \frac{m_0}{M} = \frac{m_0}{m_0+m_1+m_2} = \frac{5}{16}.$$

2 body

6. 1) Naměřené údaje udává tabulka:

$r = 0{,}041$ m					
$\frac{\alpha}{\circ}$	0	45	90	135	180
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	0	0,0322	0,0644	0,1038	0,1288
$\frac{F}{\mathrm{N}}$	1,5	4,0	6,0	7,5	9,5

2) Bodový graf s naměřenými hodnotami a spojnice trendu s rovnicí:



3) Útvar pod grafem je pravoúhlý lichoběžník. Z grafu, nebo přesněji z rovnice spojnice trendu, zjistíme potřebné údaje a vypočteme obsah lichoběžníku, a tím v příslušných jednotkách hledanou práci:

$$S \widehat{=} W = E_p = \frac{F(180°) + F(0°)}{2} \cdot s_{\text{celková}} = \frac{7{,}592\,2 + 1{,}819\,4}{2}\ \text{N} \cdot 0{,}128\,8\ \text{m} = 0{,}61\ \text{J}.$$

Závěr: Měřením jsme zjistili, že velikost vnější síly při napínání pružiny pastičky roste s úhlem otočení přibližně lineárně. Práce potřebná k napnutí pastičky je přibližně 0,61 J.

7.a) Podle zákona zachování hybnosti

$$m_0 v_1 = m_0 w \quad \Rightarrow \quad v_1 = w \ = 3\ 000\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 bod

b) Po prvním odvržení plynů získá raketa rychlost Δv_1, pro kterou platí

$$\frac{3}{2} m_0 \Delta v_1 = \frac{1}{2} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_1 = \frac{1}{3} w.$$

V soustavě spojené s raketou odvržením plynů rychlostí w získá raketa z klidu rychlost Δv_2, pro kterou platí

$$m_0 \Delta v_2 = \frac{1}{2} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_2 = \frac{1}{2} w.$$

Tímto dvojím urychlením získá raketa celkovou rychlost

$$v_2 = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \frac{1}{3} w + \frac{1}{2} w = \frac{5}{6} w = 2\,500\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

c) Obdobně trojím odvržením plynů dostáváme

$$\frac{5}{3} m_0 \Delta v_1 = \frac{1}{3} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_1 = \frac{1}{5} w,$$

$$\frac{4}{3} m_0 \Delta v_2 = \frac{1}{3} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_2 = \frac{1}{4} w,$$

$$m_0 \Delta v_3 = \frac{1}{3} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_3 = \frac{1}{3} w.$$

$$v_3 = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = \frac{1}{5} w + \frac{1}{4} w + \frac{1}{3} w = \frac{47}{60} w = 2\,350\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

d) Odvrhneme-li postupně n dávek plynů, každou o hmotnosti m_0/n, dostáváme

$$\left(m_0 + m_0 - \frac{1}{n} m_0 \right) \Delta v_1 = \frac{1}{n} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_1 = \frac{1}{2n - 1} w,$$

$$\left(m_0 + m_0 - \frac{2}{n} m_0 \right) \Delta v_2 = \frac{1}{n} m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_2 = \frac{1}{2n - 2} w,$$

$$\vdots$$

$$\left(m_0 + m_0 - \frac{n}{n}m_0\right)\Delta v_n = \frac{1}{n}m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_n = \frac{1}{2n-n}w = \frac{1}{n}w,$$

$$v_n = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots + \Delta v_n = \frac{1}{2n-1}w + \frac{1}{2n-2}w + \ldots + \frac{1}{2n-n}w.$$

V Excelu pro $n = 10$ do prvního sloupce vložíme pořadové číslo i odvržení $i = 1$, 2, …10, do druhého vložíme vzorec $\frac{1}{2\cdot 10 - i}$, kterým získáme přírůstek rychlosti rakety jako číselný násobek rychlosti w. Hodnoty v druhém sloupci sečteme. Postup zopakujeme pro $n = 100$ a pro $n = 1\ 000$.

i	Dvi/w (m0)
1	0,05263158
2	0,05555556
3	0,05882353
4	0,06250000
5	0,06666667
6	0,07142857
7	0,07692308
8	0,08333333
9	0,09090909
10	0,10000000
v10/w	0,71877140

i	Dvi/w (m0)
1	0,00502513
2	0,00505051
3	0,00507614
	.
	.
	.
	.
98	0,00980392
99	0,00990099
100	0,01000000
v100/w	0,69565343

i	Dvi/w (m0)
1	0,00050025
2	0,00050050
3	0,00050075
	.
	.
	.
	.
998	0,00099800
999	0,00099900
1000	0,00100000
v1000/w	0,69339724

Z tabulky plyne

$$v_{10} = 0{,}718\,771w = 2\,156\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$
$$v_{100} = 0{,}695\,653w = 2\,087\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$
$$v_{1000} = 0{,}693\,397w = 2\,080\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

Poznámka: Čím jsme palivo rozdělili na větší počet menších dávek, tím se konečná rychlost rakety více blíží k teoretické hodnotě spojitého vypuzování plynu. Tuto hodnotu lze získat integrálním počtem, s přesností na 6 platných číslic vychází

$$v = w\cdot\ln\frac{2m_0}{m_0} = w\cdot\ln 2 = 0{,}693\,147w = 2\,079{,}44\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

e) Podobně dostaneme pro hmotnost $5m_0$ paliva:

$$\left(m_0 + 5m_0 - \frac{1}{n}\cdot 5m_0\right)\Delta v_1 = \frac{1}{n}\cdot 5m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_1 = \frac{5}{6n-5}w,$$

$$\left(m_0 + 5m_0 - \frac{2}{n}\cdot 5m_0\right)\Delta v_2 = \frac{1}{n}\cdot 5m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_2 = \frac{5}{6n-10}w,$$

$$\left(m_0 + 5m_0 - \frac{n}{n}\cdot 5m_0\right)\Delta v_n = \frac{1}{n}\cdot 5m_0 w \quad \Rightarrow \quad \Delta v_n = \frac{5}{6n-5n}w = \frac{5}{n}w,$$

$$v_n = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots + \Delta v_n = \frac{5}{6n-5}w + \frac{5}{6n-10}w + \ldots + \frac{5}{6n-5n}w.$$

V Excelu pro $n = 10$ vkládáme tentokrát vzorec $\frac{5}{6\cdot 10 - 5i}$. Postup opět zopakujeme pro $n = 100$ a pro $n = 1\ 000$.

i	Dvi/w (5m0)
1	0,09090909
2	0,10000000
3	0,11111111
4	0,12500000
5	0,14285714
6	0,16666667
7	0,20000000
8	0,25000000
9	0,33333333
10	0,50000000
v10/w	2,01987734

i	Dvi/w (5m0)
1	0,00840336
2	0,00847458
3	0,00854701
	.
	.
	.
	.
98	0,04545455
99	0,04761905
100	0,05000000
v100/w	1,812795297

i	Dvi/w (5m0)
1	0,00083403
2	0,00083472
3	0,00083542
	.
	.
	.
	.
998	0,00495050
999	0,00497512
1000	0,00500000
v1000/w	1,793844828

Z tabulky plyne

$$v_{10} = 2{,}019\,877w = 6\,060\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$
$$v_{100} = 1{,}812\,795w = 5\,438\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$
$$v_{1000} = 1{,}793\,845w = 5\,382\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

Poznámka: Teoretická hodnota spojitého vypuzování plynu získaná integrálním počtem s přesností na 6 platných číslic vychází

$$v = w\cdot\ln\frac{6m_0}{m_0} = w\cdot\ln 6 = 1{,}791\,759w = 5\,375{,}28\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Zatímco hmotnost paliva byla 5krát větší, rychlost se zvětšila pouze 2,6krát. Výsledná rychlost nedosahuje ani první kosmické rychlosti. Při vyslání rakety na oběžnou dráhu kolem Země je kromě urychlení rakety na kruhovou rychlost potřeba ještě vykonat práci nutnou ke zvýšení potenciální energie rakety a k překonání odporové síly atmosféry. Pro kosmické lety se používají rakety vícestupňové, u nichž se využité části (motory a palivové nádrže) postupně odhazují. Požadovanou rychlost získá jen poslední, obvykle třetí, stupeň rakety. Poměr hmotnosti kosmické lodi na oběžné dráze a startovní hmotnosti celé rakety bývá zhruba 1:20.