



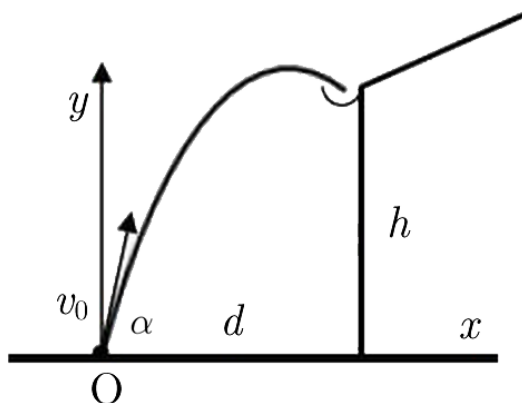
Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky
Úlohy celostátního kola 67. ročníku FO
kategorie A

1. Hra s míčem

Chlapec stál ve vzdálenosti $d = 6,0$ m od vysoké svislé stěny a kopal míč na stěnu. Na horním okraji stěny ve výšce $h = 7,5$ m nad terénem se nacházel okapový žlab (obr. 1). Otec chlapce varoval, aby nekopal míč příliš vysoko, protože pokud spadne do žlabu, vznikne problém míč vyprostit. Na vodorovném hřišti chlapec dokopl tentýž míč do maximální vzdálenosti $D = 14$ m.

- Nakreslete obrázek trajektorie míče při kopu na vodorovném hřišti a vyznačte v něm potřebné veličiny. Odvoďte rovnici svislé souřadnice y trajektorie míče jako funkci vodorovné souřadnice x a parametrů v_0 , α .
- Určete hodnotu $v_{0\max}$ počáteční rychlosti v_0 míče, kterou je chlapec schopen míči udělit.
- Ověřte výpočtem, zda je chlapec schopen ze vzdálenosti d před stěnou vykopnout míč do žlabu, využije-li svou maximální rychlost $v_{0\max}$ výkopu. V případě kladné odpovědi určete úhel α , pod kterým je třeba míč vykopnout.
- Určete teoreticky minimální hodnotu $v_{0\min}$ počáteční rychlosti v_0 míče, aby chlapec ze vzdálenosti d od stěny vykopl míč do žlabu.

Výšku chlapce ani rozměry žlabu neuvažujte, tj. výkop míče je z úrovně $h_0 = 0$ a bod dopadu do žlabu je ve vodorovné vzdálenosti d od místa výkopu. Odpor vzduchu neuvažujte, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 1

2. Tepelný děj

Ve válci je pístem uzavřen dusík o látkovém množství $n = 1,00$ mol. Počáteční objem plynu je $V_1 = 20,0$ l. Plyn nejprve stlačíme pístem z počátečního objemu V_1 na poloviční objem V_2 při konstantní teplotě $T_1 = 400$ K, poté ve druhé fázi děje plyn zahřejeme na teplotu $T_2 = 700$ K při konstantním objemu V_2 . Ve třetí fázi děje plyn expanduje na původní objem V_1 při konstantní teplotě T_2 a ve čtvrté fázi se plyn vrátí do počátečního stavu při konstantním objemu.

- Určete hodnoty tlaku v jednotlivých stavech přechodu mezi fázemi děje a děj znázorněte graficky v pV -diagramu.
- Určete účinnost η děje.

Uvažujte Carnotův cyklus, který má s původním dějem shodnou první fázi, zatímco druhá a čtvrtá fáze jsou nahrazeny adiabatickými ději. Teploty T_1 a T_2 izotermických fází zůstávají stejné jako v původním cyklu.

- Určete počáteční objem V_3 a konečný objem V_4 třetí fáze Carnotova cyklu a znázorněte tento cyklus čárkovaně v grafu původního děje.
- Určete účinnost η_C Carnotova cyklu s teplotami T_1 a T_2 a stanovte poměr $\frac{\eta_C}{\eta}$.

Úlohu řešte obecně a poté pro dané číselné hodnoty. Molární plynová konstanta je $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, Poissonova konstanta dusíku $\kappa = 1,40$. Plyn považujte za ideální.

Poznámka: Molární tepelná kapacita ideálního plynu při konstantním objemu je

$$C_V = \frac{R}{\kappa - 1}.$$

Pomůcka: Práce při izotermickém ději mezi stavy A a B je

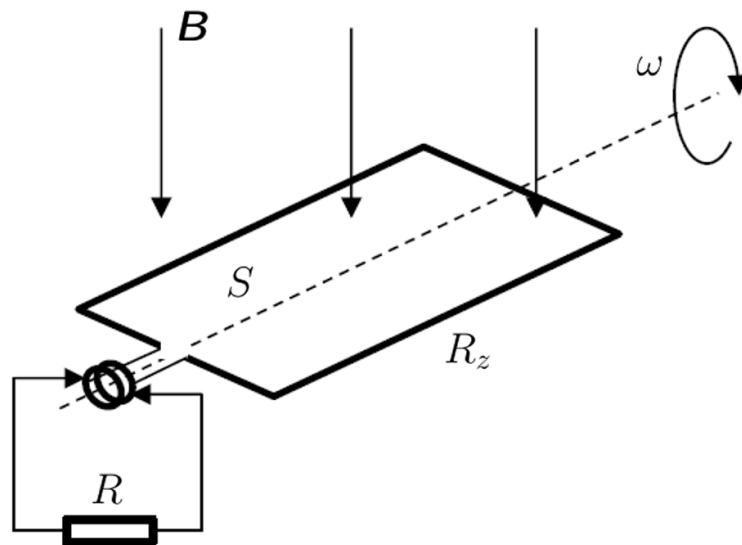
$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p \, dV.$$

3. Elektromagnetická brzda

K brzdění velkých vozidel, například rychlovlaků, se používají elektromagnetické brzdy. K motoru se místo napájení připojí rezistor, takže motor pracuje jako generátor elektrického proudu a elektrická energie se přeměňuje na teplo v rezistoru.

Použijeme jednoduchý model obdélníkové cívky s obsahem plochy S , s N závitů a s odporem R_z , která rotuje v konstantním a homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí B (viz obrázek 2). Pomocí kluzných kontaktů je k cívce připojen rezistor s odporem R . Na začátku, v okamžiku připojení rezistoru, se cívka otáčí s úhlovou rychlostí ω_0 .

- Určete amplitudu I_m proudu, který prochází rezistorem s odporem R při úhlové rychlosti ω_0 .
- Určete střední hodnotu P tepelného výkonu, který se uvolňuje v soustavě cívka–rezistor. Dále určete hodnotu P_0 tohoto výkonu při úhlové rychlosti ω_0 .
- Určete brzdicí moment síly M , který působí na rotující cívku při úhlové rychlosti ω , a hodnotu M_0 tohoto momentu při úhlové rychlosti ω_0 .
- Určete, po kolika otáčkách n se cívka v důsledku elektromagnetického brzdění zastaví, je-li moment setrvačnosti rotující části J .



Obr. 2

Úlohu řešte obecně, pak pro hodnoty $\omega_0 = 1000\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $N = 200$, $S = 400 \text{ cm}^2$, $R_z = 5,0 \Omega$, $R = 20 \Omega$, $B = 200 \text{ mT}$, $J = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Na počátku je rovina cívky kolmá ke směru magnetické indukce. Předpokládejte, že úhlová rychlost je velká, neboli že perioda rotace je zanedbatelná vůči dějům při brzdění, tedy vůči době brzdění.

4. Komplex Y-12

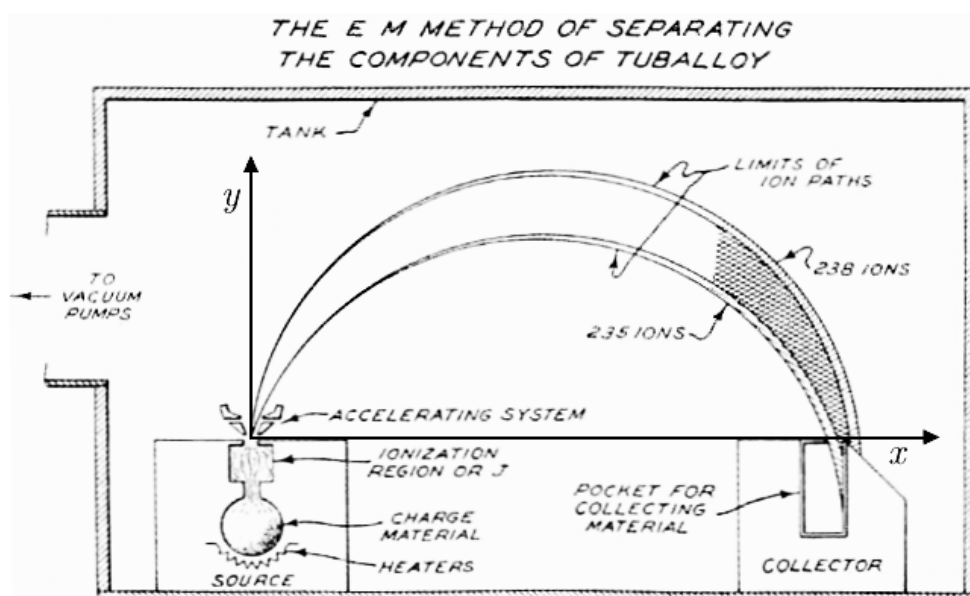
Během projektu Manhattan bylo zapotřebí získat velké množství izotopu uranu 235. V zařízení s krycím názvem Komplex Y-12 bylo celkem 1152 zařízení známých jako *calutrony* (zkratkové slovo z CALifornia University cycloTRON). Jednalo se o hmotnostní spektrometry, kde byl ionizovaný plyn urychlen napětím U a následně zakřiven v homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} ($\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$), aby dopadl do sběrných nádob (kolektorů, obr. 3). Homogenní magnetické pole vyplňuje oblast $y > 0$, přímka $y = 0$ je jeho hranice. Protože je rozdíl hmotností izotopů ^{235}U a ^{238}U velmi malý, byla klíčová přesnost zaměření iontového svazku.

- Předpokládejme nejprve, že všechny ionty opouštějí zdroj v bodě $(0,0)$ přesně ve směru osy y (kolmo na hranici magnetického pole). Odvoďte výraz pro poloměr trajektorie R iontu s hmotností m a nábojem $+q_e$. Určete vzdálenost d mezi dopadovými místy (průsečíky drah s přímkou $y = 0$) pro izotopy ^{235}U a ^{238}U .
- Ukažte, že doba letu iontů při ohybu o 180° v homogenním poli nezávisí na U . Vypočtěte rozdíl dob dopadu dvou iontů, které byly vyslány současně: $\Delta t = t_{238} - t_{235}$.
- V reálném zdroji vyletují ionty ze zdroje s úhlovým rozptylem. Nechť iont ^{235}U vylétá z počátku pod úhlem α od osy y (kde $\alpha = 0$ je ideální kolmý směr). Souřadnice x , kde iont po opsání půlkružnice dopadne zpět na rovinu $y = 0$, je dána vztahem:

$$x(\alpha) = 2R \cos \alpha. \quad (1)$$

Pro malé úhly α (kde platí $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$) určete celkovou šířku stopy Δx stopy svazku, pokud se úhly α pohybují v intervalu $\langle -\alpha_{\max}, \alpha_{\max} \rangle$.

- Odvoďte vzorec (1).



Obr. 3

Pohyb je nerelativistický. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $B = 0,385 \text{ T}$, $U = 30,0 \text{ kV}$, $\alpha_{\max} = 3,00^\circ$. Atomová hmotnostní jednotka $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, hmotnosti iontů určete vynásobením nukleonovým číslem. Zanedbejte tíhové zrychlení, srážky i vlastní elektrická pole svazků.