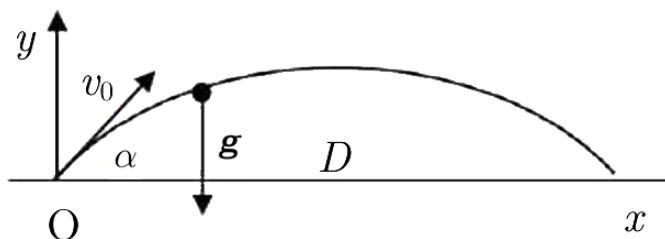


Řešení úloh 3. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Úlohy navrhli I. Čáp (1, 2, 3) a J. Šlégr (4)

1.a) Viz obr. R1.

1 bod



Obr. R1

Ve vodorovném směru na míč nepůsobí žádná síla, proto je pohyb rovnoměrný s počáteční vodorovnou rychlostí

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha.$$

Platí tedy

$$x = v_0 t \cos \alpha. \quad (1)$$

Ve svislém směru působí na míč konstantní tíhová síla směrem dolů, která mu uděluje konstantní zrychlení

$$a_y = -g.$$

Pohyb je proto rovnoměrně zrychlený s počáteční svislou rychlostí

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha,$$

a svislá souřadnice je dána vztahem

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) vyloučíme čas t a po úpravě dostaneme rovnici trajektorie šikmého vrhu

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha, \quad (3)$$

což je rovnice paraboly.

2 body

Poznámka: Rovnici trajektorie lze upravit na základní (vrcholový) tvar

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = -k(x - a)^2 + b.$$

b) Dopad míče na vodorovnou rovinu hřiště je dán souřadnicemi bodu dopadu x_D , $y_D = 0$. Po dosazení do rovnice trajektorie (3) dostáváme

$$x_D = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Maximální dolet $x_D = D$ nastává pro $\sin 2\alpha = 1$, tj. pro $\alpha = 45^\circ$. Potom platí

$$D = \frac{v_{0\max}^2}{g},$$

odkud dostáváme

$$v_{0\max} = \sqrt{gD} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4)$$

2 body

- c) Bod trajektorie v místě žlabu má souřadnice $x_2 = d$, $y_2 = h$. Po dosazení do rovnice trajektorie (3) dostáváme

$$h = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2 + d \operatorname{tg} \alpha.$$

Aby chlapec zasáhl žlab, musí být tato rovnice splněna. Jeden z možných postupů vychází z toho, že jde o kvadratickou rovnici pro proměnnou d , kterou lze zapsat ve tvaru

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2 - d \operatorname{tg} \alpha + h = 0.$$

Její řešení je

$$d_{1,2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 4 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} h}}{2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Aby měla rovnice reálné řešení, musí být diskriminant nezáporný, tedy

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 4 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} h \geq 0. \quad (5)$$

Dosadíme-li rychlost $v_{0\max}$ ze vztahu (4), dostáváme pro chlapce podmínku

$$\sin \alpha \geq \sqrt{\frac{2h}{D}}.$$

Pro dané hodnoty veličin vychází

$$\sqrt{\frac{2h}{D}} = 1,04.$$

Tuto podmínku nelze splnit, a proto chlapec nemůže vykopnout míč do žlabu, ani když využije maximální počáteční rychlost výkopu. **3 body**

- d) Z podmínky nezáporného diskriminantu lze vyjádřit podmínku pro minimální počáteční rychlost míče

$$v_0^2 \geq \frac{2gh}{\sin^2 \alpha}.$$

Minimum počáteční rychlosti nastává tehdy, když je úhel výkopu zvolen tak, aby byla splněna geometrická podmínka

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}.$$

Po dosazení dostáváme

$$v_0^2 \geq 2gh \left(\frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h} \right)^2 = v_{0\min}^2, \text{ kde } v_{0\min} = \sqrt{2gh \left(1 + \frac{d^2}{h^2} \right)} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

2.a) V počátečním stavu A je tlak

$$p_A = p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = 166 \text{ kPa.}$$

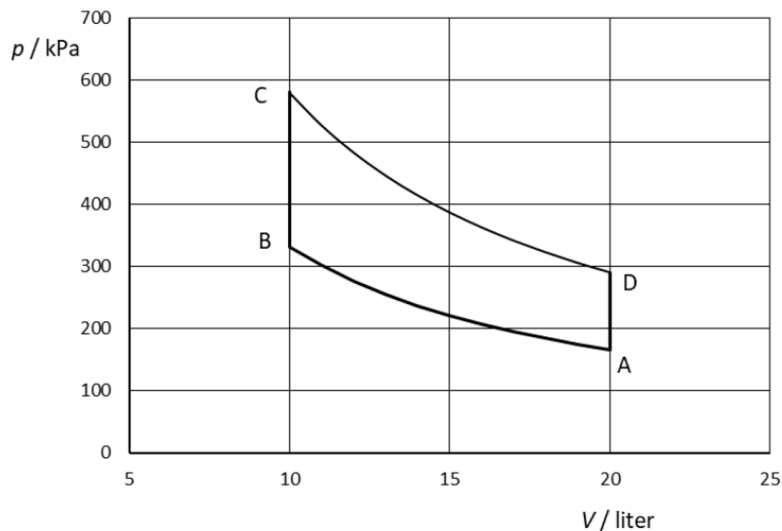
V dalších uzlech cyklu je tlak plynu

$$p_B = \frac{p_A V_A}{V_B} = 2p_1, \quad p_C = \frac{T_C p_A V_A}{T_A V_C} = 2 \frac{T_2}{T_1} p_1, \quad p_D = \frac{p_C V_C}{V_D} = \frac{1}{2} p_C = \frac{T_2}{T_1} p_1.$$

Pro dané hodnoty vychází

$$p_B = 332 \text{ kPa}, \quad p_C = 581 \text{ kPa}, \quad p_D = 291 \text{ kPa.}$$

1 bod



Obr. R2

2 body

b) Práce se koná během izotermických dějů, přičemž práce je rovna změně vnitřní energie.

Fáze AB :

$$W_{AB} = \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{p_A V_A}{V} dV = p_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -p_1 V_1 \ln 2.$$

Fáze CD :

$$W_{CD} = \int_C^D p dV = \int_C^D \frac{p_C V_C}{V} dV = p_C V_C \ln \frac{V_D}{V_C} = \frac{T_2}{T_1} p_1 V_1 \ln 2.$$

Celková vykonaná práce během děje:

$$W = W_{AB} + W_{CD} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) p_1 V_1 \ln 2.$$

Plyn přijímá z okolí teplo během fází BC a CD . Ve fázích AB a DA teplo odevzdává okolí.

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1),$$

$$Q_{CD} = W_{CD} = \frac{T_2}{T_1} p_1 V_1 \ln 2.$$

Účinnost děje:

$$\eta = \frac{W}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{(T_2 - T_1) \ln 2}{\frac{1}{\kappa-1}(T_2 - T_1) + T_2 \ln 2} = 0,168 = 16,8 \%$$

3 body

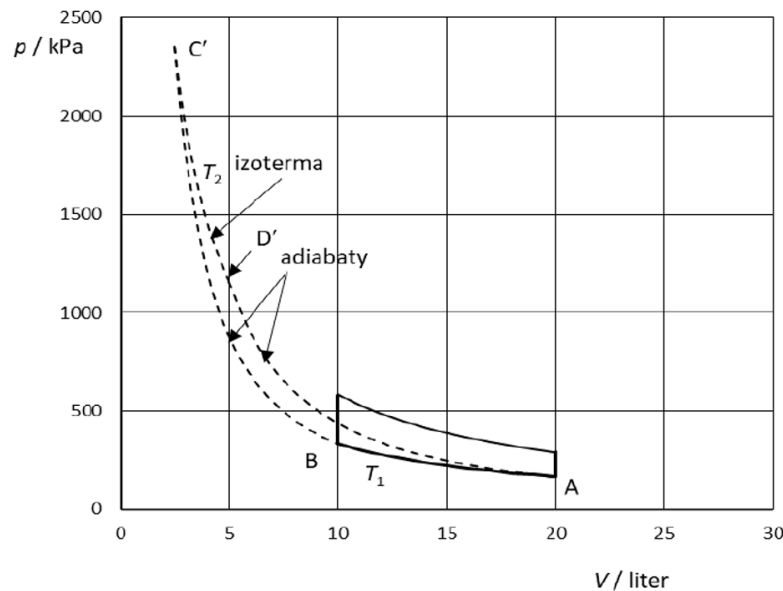
- c) Na rozdíl od původního děje jsou fáze BC a DA adiabatické, pro které platí stavová rovnice adiabatického děje

$$T_B V_B^{\kappa-1} = T_{C'} V_{C'}^{\kappa-1}, \quad T_{D'} V_{D'}^{\kappa-1} = T_A V_A^{\kappa-1}.$$

Odtud plyne

$$V_3 = V_{C'} = \left(\frac{T_B}{T_{C'}}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} V_B = \frac{V_1}{2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 2,47 \text{ l},$$

$$V_4 = V_{D'} = V_A \left(\frac{T_A}{T_{D'}}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 4,94 \text{ l}.$$



Obr. R3

2 body

- d) Účinnost Carnotova cyklu:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} \approx 0,43 = 43 \%$$

Poměr účinností:

$$\frac{\eta_C}{\eta} = 1 + \frac{1}{(\kappa - 1) \ln 2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \approx 2,55.$$

Účinnost původního děje je přibližně 39 % účinnosti Carnotova cyklu při stejných teplotách.

2 body

3.a) V cívce se indukuje elektrické napětí o velikosti

$$U = -\frac{d\Phi}{dt},$$

kde $\Phi = NBS \cos \alpha = NBS \cos(\omega t)$ je magnetický indukční tok (úhel α je mezi vektorem magnetické indukce \mathbf{B} a normálou k ploše cívky). Protože se jedná o uzavřený elektrický obvod, je proud v obvodu

$$I = \frac{U}{R + R_z} = -\frac{NBS\omega}{R + R_z} \sin(\omega t).$$

Amplituda proudu při úhlové frekvenci ω_0 je

$$I_m = \frac{NBS\omega_0}{R + R_z} = 200 \text{ A.}$$

2 body

b) Tepelný výkon v čase t je

$$P(t) = (R + R_z)I^2 = \frac{(NBS\omega)^2}{R + R_z} \sin^2(\omega t) = \frac{(NBS\omega)^2}{R + R_z} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}.$$

Protože střední hodnota harmonické funkce za jednu periodu je nulová, je střední hodnota výkonu

$$P = \frac{1}{2} \frac{(NBS\omega)^2}{R + R_z}.$$

Při úhlové rychlosti ω_0 vychází

$$P = 500 \text{ kW.}$$

3 body

c) Výkon momentu síly je

$$P = M\omega.$$

Počáteční moment síly je tedy

$$M_0 = -\frac{(NBS)^2}{2(R + R_z)} \omega_0 = -160 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

2 body

d) Úhlová rychlost je definována vztahem

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

odkud plyne

$$d\varphi = \omega dt.$$

V důsledku působení brzdícího momentu síly se mění moment hybnosti rotoru podle pohybové rovnice

$$\frac{dL}{dt} = M,$$

kde

$$L = J\omega$$

je moment hybnosti.

Integrujeme rovnici

$$dL = M dt :$$

$$\int_{L_0}^0 dL = \int_0^t M dt = - \int_0^t \frac{(NBS)^2}{2(R + R_z)} \omega dt = - \frac{(NBS)^2}{2(R + R_z)} \int_0^\varphi d\varphi,$$

tedy

$$-L_0 = - \frac{(NBS)^2}{2(R + R_z)} \varphi.$$

Počet otáček do zastavení je

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{J(R + R_z)\omega_0}{\pi(NBS)^2} = 2,4 \cdot 10^4.$$

3 body

4.a) Na iont působí magnetická síla $F_m = BQv$, která je silou dostředivou:

$$BQv = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{BQ}. \quad (1)$$

Urychlení napětím U dodá iontu kinetickou energii

$$QU = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}. \quad (2)$$

Dosazením za (2) do (1) dostaneme pro poloměr dráhy iontu

$$R = \sqrt{\frac{2mU}{B^2Q}}.$$

2 body

Ze vztahu je zřejmé, že těžší iont bude mít větší poloměr dráhy, proto budeme vzdálenost d počítat jako

$$\begin{aligned} d = 2R_{238} - 2R_{235} &= 2 \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 238m_u \cdot U}{B^2Q}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 235m_u \cdot U}{B^2Q}} \right) = \\ &= 2\sqrt{\frac{2m_u U}{B^2Q}} (\sqrt{238} - \sqrt{235}) = 1,26 \text{ cm}. \end{aligned}$$

1 bod

b) Dobu letu iontu po půlkruhové trajektorii lze vyjádřit jako

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{2QU}{m}}} = \frac{\pi \sqrt{\frac{2mU}{B^2Q}}}{\sqrt{\frac{2QU}{m}}} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{B^2Q^2}} = \frac{\pi m}{BQ},$$

2 body

tedy skutečně nezávisí na napětí U . Pro rozdíl dob letu iontů platí

$$\Delta t = \frac{\pi m_u}{BQ} (238 - 235) = 2,54 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0,254 \text{ } \mu\text{s}.$$

1 bod

c) V dané aproximaci platí

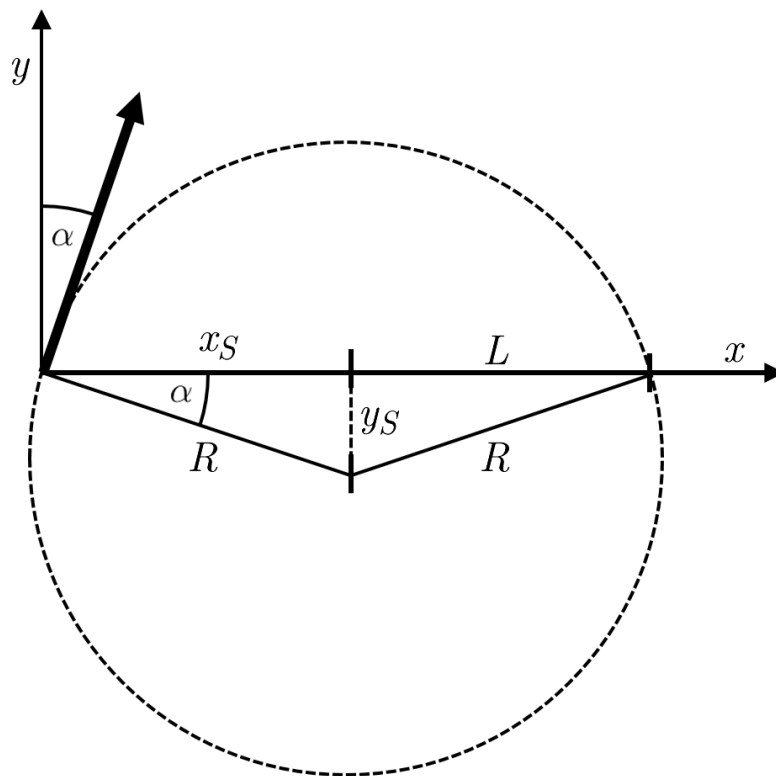
$$x(\alpha) = 2R \cos \alpha \approx 2R \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Pro $\alpha \in \langle -\alpha_{\max}, \alpha_{\max} \rangle$ je x v intervalu $\langle 2R \cos \alpha_{\max}, 2R \rangle$, tedy rozptyl (plná šířka vůči ideálnímu $\alpha = 0$) bude

$$\Delta x = x(0) - x(\alpha_{\max}) = 2R(1 - \cos \alpha_{\max}) = R\alpha_{\max}^2 = 2,72 \text{ mm}.$$

1 bod

Poznámka: Porovnáním s výsledkem a) vidíme, že je rozptyl menší než separace, takže calutron dokáže efektivně separovat izotopy. Této metodě se také říká „směrová fokusace“, protože redukuje rozptyl svazku.



Obr. R4

d) Z počátku $(0,0)$ letí iont pod úhlem α od osy y . Poloměr do středu kružnice musí být kolmý na tečnu, takže je odkloněn od osy x právě o α . Střed kružnice má souřadnice (viz obr. 3)

$$x_S = R \cos \alpha, \quad y_S = -R \sin \alpha.$$

Kružnice protíná přímku $y = 0$ ve dvou bodech. Jeden je start $x = 0$, druhý je ve vzdálenosti L od středu. Ze symetrie kružnice plyne, že bod dopadu (na ose

$y = 0$) je od počátku vzdálen dvojnásobek x -ové souřadnice středu:

$$x(\alpha) = 2x_S = 2R \cos \alpha,$$

což bylo dokázati.

3 body

Alternativní řešení části d): Může se objevit i následující řešení, pokud si někdo neuvědomí symetrii:

$$L = \sqrt{R^2 - (R \sin \alpha)^2} = R \cos \alpha.$$

Iont protne osu x ve vzdálenosti

$$x = x_S + L = R \cos \alpha + R \cos \alpha = 2R \cos \alpha. \quad \square$$

Pokud na to někdo půjde analytickou geometrií: Vektor rychlosti svírá s osou x úhel $90^\circ - \alpha$. Střed kruhové trajektorie leží ve vzdálenosti R od počátku ve směru kolmém na vektor rychlosti.

Kolmice k vektoru rychlosti proto svírá s osou x úhel α pod osou x . Souřadnice středu kružnice S jsou tedy

$$S = (-R \cos \alpha, R \sin \alpha).$$

Rovnice kružnice má tvar

$$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = R^2,$$

tj.

$$(x + R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 = R^2.$$

Hledáme průsečík s osou x , tedy položíme $y = 0$:

$$(x + R \cos \alpha)^2 + R^2 \sin^2 \alpha = R^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$(x + R \cos \alpha)^2 = R^2(1 - \sin^2 \alpha) = R^2 \cos^2 \alpha.$$

Odmocněním vyjde

$$x + R \cos \alpha = \pm R \cos \alpha.$$

Záporné znaménko dává řešení $x = 0$, které odpovídá startovnímu bodu. Druhé řešení odpovídá místu dopadu na kolektor:

$$x = R \cos \alpha + R \cos \alpha = 2R \cos \alpha. \quad \square$$