**Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky**

# Experimentální úloha celostátního kola

**67. ročníku FO**

Olomouc 2026

## Ukázkové řešení: Pružnost a pevnost špaget

## 1. Část A – Experimentální

### A1 – Pozorování lomu špagety

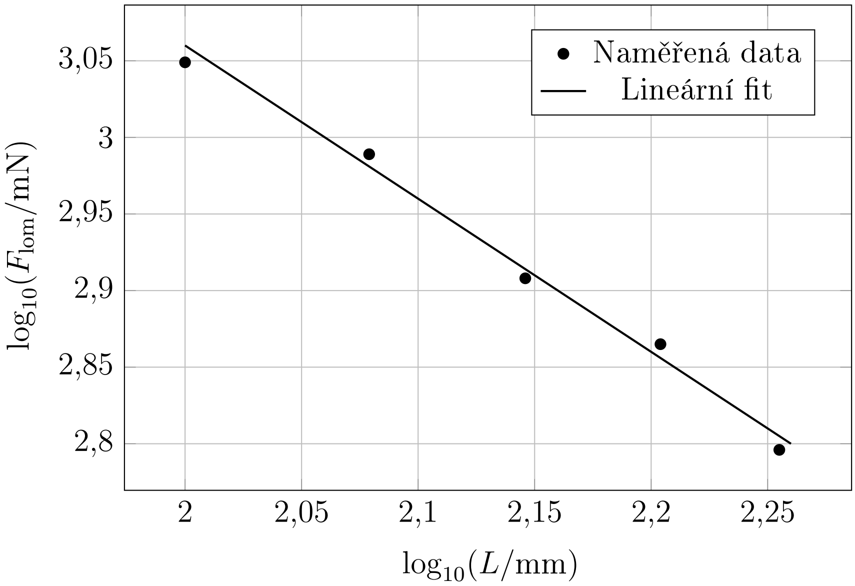
1. Počet zlomů: většinou tři nebo víc
2. Poloha: první lom uprostřed, další zlomy směrem k okrajům
3. Opakovatelnost: výsledek není vždy identický
4. Mechanismus: při dosažení maximálního ohybového napětí ve středu prutu dojde k lokálnímu lomu. Uvolněná elastická energie se šíří rázovou vlnou podél špagety, což často způsobuje sekundární zlomy. Tento jev je znám jako *"snap-back effect"* a vysvětluje, proč se špageta při lámání často rozpadne na více kousků. Rázová vlna přenáší energii rychleji než pomalé plastické deformace a materiál s křehkou strukturou (jako škrob v těstovině) se rozlomí v několika místech.

### A2 – Měření síly potřebné ke zlomení špagety

Naměřené hodnoty síly potřebné ke zlomení špagety v závislosti na vzdálenosti opor:

| $L$/mm | $F_{\mathrm{lom}}$/mN |
|---|---|
| 180 | 625 |
| 160 | 732 |
| 140 | 808 |
| 120 | 975 |
| 100 | 1120 |

Závislost $\log F_{\mathrm{lom}}$ na $\log L$ byla vynesena do grafu.




Body v grafu leží přibližně na přímce, což ukazuje na lineární závislost mezi $\log F_{\text{lom}}$ a $\log L$, tedy

$$\log F_{\text{lom}} = n \log L + \log k,$$

kde $n$ je směrnice přímky a $\log k$ je průsečík přímky s osou y. Směrnici přímky lze jednoduše odhadnout např. z krajních bodů:

$$n \approx \frac{\log_{10} 1120 - \log_{10} 625}{\log_{10} 100 - \log_{10} 180} \approx \frac{3{,}049 - 2{,}796}{2{,}000 - 2{,}255} \approx -0{,}992 \approx -1.$$

V našem případě tedy po odlogaritmování

$$F_{\text{lom}} = \frac{k}{L}$$

Konstantu úměrnosti $k$ určíme pro jednoduchost dosazením libovolného bodu, např. $L = 180\,\text{mm}$, $F_{\text{lom}} = 625\,\text{mN}$:

$$k = F_{\text{lom}} \cdot L \approx 625\,\text{mN} \cdot 180\,\text{mm} \approx 1{,}13 \cdot 10^{-1}\,\text{N}\,\text{m}.$$

Výsledná experimentální závislost má tvar

$$F_{\text{lom}} \approx \frac{1{,}13 \cdot 10^{-1}\,\text{N}\,\text{m}}{L}$$

kde $L$ je vyjádřeno v metrech a $F_{\text{lom}}$ v newtonech.

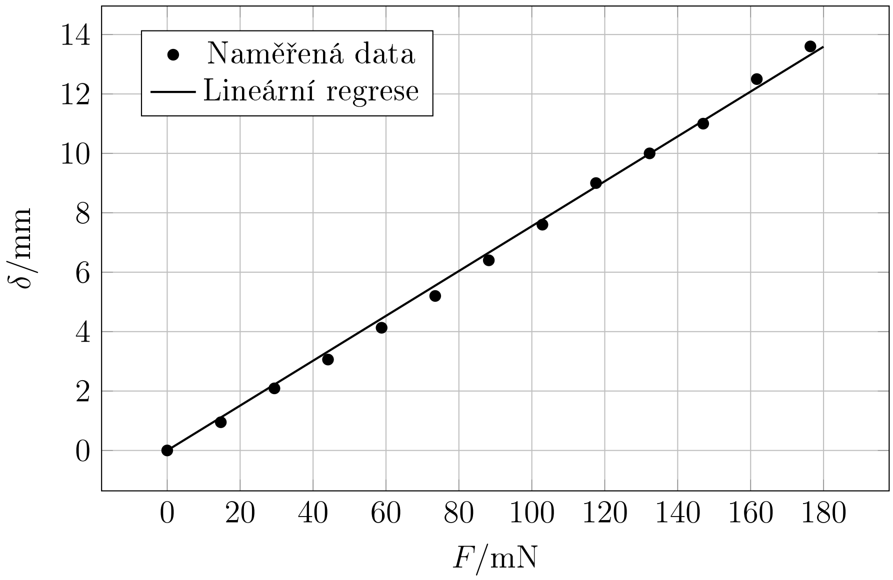
## A3 – Měření Youngova modulu

Naměřené hodnoty:

- Průměr špagety: $d \approx 1{,}9\,\text{mm} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$
- Vzdálenost opor: $L = 203\,\text{mm} = 0{,}203\,\text{m}$

| $F$/mN | $\delta$/mm |
|---|---|
| 0 | 0,0 |
| 14,7 | 0,95 |
| 29,4 | 2,09 |
| 44,1 | 3,06 |
| 58,8 | 4,13 |
| 73,5 | 5,20 |
| 88,2 | 6,40 |
| 102,9 | 7,60 |
| 117,6 | 9,00 |
| 132,3 | 10,0 |
| 147,0 | 11,0 |
| 161,7 | 12,5 |
| 176,4 | 13,6 |

Maximální průhyb nepřesahuje hodnotu $\delta \approx L/15$, a proto lze všechna uvedená data považovat za součást oblasti lineární pružnosti.




Lineární regresí procházející nulou:

$$a = \frac{\sum_i F_i \delta_i}{\sum_i F_i^2} = \frac{1{,}060 \cdot 10^4\,\mathrm{mN\,mm}}{1{,}405 \cdot 10^5\,\mathrm{mN}^2} \approx 75{,}5\,\mathrm{mm/N}$$

Koeficient determinace

$$R^2 = \frac{\left(\sum_i F_i \delta_i\right)^2}{\sum_i F_i^2 \sum_i \delta_i^2} \approx 0{,}999$$

Moment setrvačnosti průřezu:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \approx 6{,}40 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}^4$$

Youngův modul:

$$E = \frac{L^3}{48Ia} \approx 3{,}61 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa} = 3{,}61\,\mathrm{GPa}$$

**Diskuze chyb a propagace nejistot**

- Nejistota měření průhybu: $\pm 0{,}1$ mm $\rightarrow$ ovlivňuje parametr $a$ lineární regrese
- Nepřesný průměr špagety: chyby v $d$ mají vliv $E \propto d^{-4} \rightarrow$ drobná odchylka výrazně mění výsledný modul
- Nejistota délky opor $L$: obvykle zanedbatelná, ale pro velmi malé L může ovlivnit $E \propto L^3$
- Doporučení: měřit průměr špagety na více místech, opakovat průhybová měření, používat přesnější posuvné měřítko

## 2. Část B – Teoretická analýza

### B1 – Modelování ohybového napětí

Ohybové napětí v prutu zatíženém ohybovým momentem je v libovolném bodě průřezu dáno vztahem

$$\sigma = \frac{My}{I},$$

kde $M$ je ohybový moment v daném průřezu, $y$ je vzdálenost bodu od neutrální osy a $I$ je moment setrvačnosti průřezu.

Uvažujme špagetu jako prostý nosník podepřený na obou koncích a zatížený silou $F$ uprostřed mezi oporami. Maximální ohybový moment vzniká ve středu nosníku a má velikost

$$M_{\max} = \frac{FL}{4}.$$

Největší ohybové napětí vzniká na povrchu špagety, tedy ve vzdálenosti

$$y_{\max} = \frac{d}{2}$$

od neutrální osy, kde $d$ je průměr špagety.

Dosazením do vztahu pro ohybové napětí dostaneme mezní ohybové napětí

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I} = \frac{FL}{4} \cdot \frac{d}{2I} = \frac{FLd}{8I}.$$

Pro kruhový průřez špagety je moment setrvačnosti

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Po dosazení získáme výsledný vztah pro mezní ohybové napětí při lomu:

$$\sigma_{\mathrm{mez}} = \frac{8F_{\mathrm{lom}}L}{\pi d^3}.$$

Jednotkou ohybového napětí je

$$[\sigma] = \mathrm{Pa}.$$

### Numerický odhad mezního ohybového napětí

Pro numerický odhad mezního ohybového napětí použijeme experimentálně naměřené hodnoty z části A2. Pro hrubý odhad uvažujme jednoduše pouze jeden konkrétní bod z tabulky:

- vzdálenost opor: $L = 160\,\mathrm{mm}$,
- průměr špagety: $d = 1{,}9\,\mathrm{mm}$,
- síla při lomu: $F_{\mathrm{lom}} = 732\,\mathrm{mN}$.

Mezní ohybové napětí je dáno vztahem

$$\sigma_{\mathrm{mez}} = \frac{8F_{\mathrm{lom}}L}{\pi d^3}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$\sigma_{\mathrm{mez}} = \frac{8 \cdot 732\,\mathrm{mN} \cdot 160\,\mathrm{mm}}{\pi \cdot (1{,}9\,\mathrm{mm})^3} \approx 43{,}5\,\mathrm{N/mm^2}.$$

Výsledná hodnota mezního ohybového napětí je tedy

$$\sigma_{\mathrm{mez}} \approx 43{,}5\,\mathrm{MPa}.$$

Tato hodnota odpovídá řádově pevnosti křehkých polymerních a škrobových materiálů a je v souladu s očekávaným chováním suchých špaget při ohybovém namáhání.

### B2 – Vyjádření Youngova modulu a vliv přesnosti měření

$$E = \frac{FL^3}{48I\delta} = \frac{4FL^3}{3\pi d^4 \delta}$$

Odvození jednotky

$$[E] = \frac{[F]\,[L]^3}{[d]^4\,[\delta]} = \frac{\mathrm{N\,m^3}}{\mathrm{m^4\,m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{Pa}.$$

- Přesnost měření $F$, $\delta$: nepřesné odečty vedou k chybnému výpočtu $E$
- Přesnost $d$: nejkritičtější, protože $E \propto d^{-4} \rightarrow$ malá chyba v průměru vede k velké chybě v $E$
- Přesnost $L$: $E \propto L^3$, chyba v měření vzdálenosti opor ovlivňuje vypočtenou hodnotu Youngova modulu pružnosti, zejména při malých vzdálenostech
- Doporučení: měřit průměr přesněji, např. mikrometrem, použít jemné závaží pro přesné určení $F$, přesně odečítat průhyb (např. kamerou, apod.)

## 3. Část C – Diskuze a závěr

- Největší vliv na pevnost špaget má průměr a kvalita těsta (mikrotrhliny, homogennost)
- Vlhkost špaget: čerstvě vysušené vs. vlhké špagety – vlhké jsou pružnější, lámou se obtížněji, Youngův modul je nižší
- Rychlost ohybu: pomalé ohýbání $\rightarrow$ menší počet zlomených kousků, rychlé $\rightarrow$ více zlomených částí díky rázovým vlnám
- Experimentální chyby: mimoosé zatížení, nerovnoměrný průměr, nepřesný odhad průhybu, tření opor
- Zlepšení experimentu: přesné měření průměru, video-analýza průhybu, více vzorků pro statistickou jistotu, kalibrovaná závaží
- Shrnutí: experimentální $E \approx 3{,}61$ GPa a $\sigma_{\mathrm{mez}} \approx 43{,}5$ MPa odpovídají literatuře pro křehké těstoviny, závislost $F_{\mathrm{lom}} \propto L^{-1}$ potvrzuje teoretický model ohybového momentu

## Shrnutí klíčových výsledků

| Veličina | Hodnota |
|---|---|
| Youngův modul $E$ | $3{,}61\,\mathrm{GPa}$ |
| Mezní ohybové napětí $\sigma_{\mathrm{mez}}$ | $\approx 43{,}5\,\mathrm{MPa}$ |
| Závislost lomové síly | $F_{\mathrm{lom}} \propto L^{-1}$ |