

Úlohy 1. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Není-li uvedeno jinak, v úlohách uvažujte tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Tryskový batoh alias *jetpack*

Vynálezce Raymond Li navrhl zařízení, které splňuje definici *tryskového batohu*, protože umožňuje levitaci díky vodnímu proudu, který ovládá uživatel.



Obr. 1

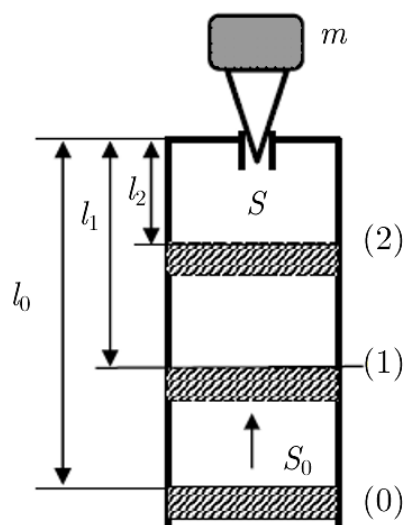
Silnou hadicí s vnitřním průměrem $d_1 = 15 \text{ cm}$ se přivádí voda z výkonného čerpadla do zařízení se dvěma rovnoběžnými tryskami s vnitřním průměrem $d_2 = 50 \text{ mm}$, v němž je člověk zavěšen. Čerpadlo je součástí vodního skútru plovoucího na hladině vody, nasává vodu otvorem ve dně skútru, který je prakticky na úrovni hladiny, a vhání ji do hadice napájející trysky.

- Vysvětlíte fyzikální princip vzniku levitační (nadmášeující) síly. Nakreslete obrázek a vyznačte v něm veličiny potřebné k vysvětlení.
- Čerpadlo je zkoušeno výtryskem vody ve vodorovném směru. Určete výkon P čerpadla, pokud je objemový průtok vody $Q_v = 3200 \text{ l} \cdot \text{min}^{-1}$, průměr vstupní hadice čerpadla a průměr výstupní hadice $d_1 = 15 \text{ cm}$ a průměr její koncové trysky $d_2 = 50 \text{ mm}$. Určete velikost reakční síly F , která na čerpadlo působí, když voda tryská z trysky ve vodorovném směru.
- Po připojení na čerpadlo ve vodním skútru je *JETLEV-flyer* schopen vystoupat až do výšky $h = 10 \text{ m}$. Určete potřebný výkon čerpadla, pokud je průměr přívodního potrubí $d_1 = 15 \text{ cm}$, průměr ústí obou trysek $d_2 = 5,0 \text{ cm}$, délková hmotnost přívodní hadice $\mu = 4,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ a hmotnost člověka se zařízením $m = 100 \text{ kg}$. Hustota vody je $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Ztráty v potrubí a v čerpadle považujte za velmi malé.

2. Válec a ventil

Ve válci s obsahem vnitřního průřezu S_0 je v poloze (0) pístem uzavřený vzduch s teplotou t_0 a tlakem p_0 , které jsou rovny teplotě a tlaku vzduchu v okolí válce. Na kruhový otvor s obsahem S , který se nachází v horní podstavě válce, je položena kuželová záklopka se závažím (tlakový ventil), přičemž hmotnost záklopky se závažím je m , viz obr. 2.



Obr. 2

- Určete počáteční látkové množství n_0 vzduchu ve válci.
- Píst posuneme z počáteční polohy (0) do polohy (1), přičemž délka vzduchového sloupce ve válci se změní z počáteční hodnoty l_0 na hodnotu l_1 . Určete hodnotu l_1 , při níž začne vzduch unikat ventilem do okolí, a teplotu t_1 , kterou vzduch během tohoto děje dosáhne. Stlačení považujte za adiabatické.

- c) Píst se dále pomalu posune z polohy (1) do polohy (2) do vzdálenosti $l_2 < l_1$ od horní podstavy válce. Popište děj v soustavě během posouvání pístu z polohy (1) do polohy (2), a uveďte, jak se mění stavové veličiny vzduchu ve válci.
- d) Nakonec se píst vrátí adiabaticky do polohy (0). Určete výslednou teplotu t_3 , tlak p_3 a látkové množství n_3 plynu ve válci, když píst dosáhne polohy (0).

Úlohu řešte obecně a poté pro dané hodnoty: $l_0 = 30 \text{ cm}$, $p_0 = 101 \text{ kPa}$, $t_0 = 20 \text{ °C}$, $S_0 = 50 \text{ cm}^2$, $S = 5,0 \text{ cm}^2$, $l_2 = 10 \text{ cm}$, $m = 1,0 \text{ kg}$, $\kappa = 1,4$, $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3. Pozitronium

Za určitých okolností může dojít k zachytu pozitronu elektronem a vytvoří se na krátký čas (přibližně desetiny ns) vázaná soustava – *pozitronium*. Jde o soustavu podobnou atomu vodíku s tím rozdílem, že proton jádra je nahrazený pozitronem, který má stejnou hmotnost jako elektron $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, ale opačný náboj $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Uvažujme jednoduchý model analogický Bohrovu modelu atomu vodíku, v němž elektron a pozitron považujeme za bodové částice pohybující se po kruhových trajektoriích kolem společného těžiště. Moment hybnosti soustavy částic je celočíselným násobkem elementárního kvanta

$$L_1 = \hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

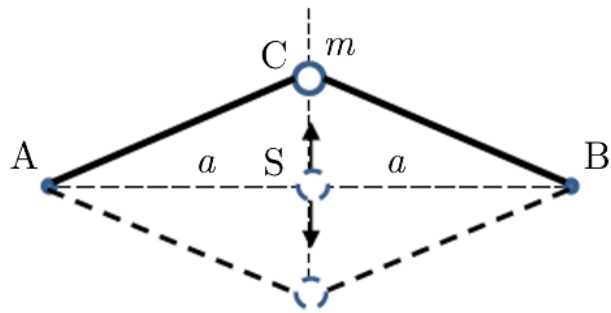
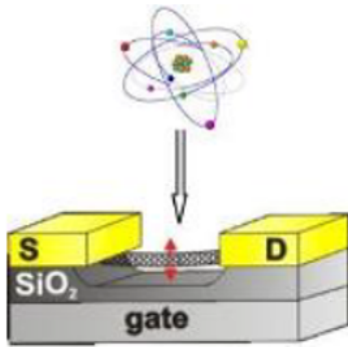
(redukovaná Planckova konstanta).

- a) Určete průměr d pozitronia v základním kvantovém stavu, který se vyznačuje momentem hybnosti soustavy částic $L = L_1$.
Poznámka: Za průměr pozitronia považujte průměr trajektorie částic.
- b) Určete vazebnou energii E_v pozitronia v základním kvantovém stavu, tj. celkovou mechanickou energii pozitronia ve vztažné soustavě těžiště. energii vyjádřete v jednotkách eV. Ukažte, že platí $E_p = -2E_k$.
- c) Pozitronium je nestabilní exotický atom s dobou života přibližně 0,1 ns. Zánik je spojen s anihilací dvojice elektron–pozitron, při které dochází k přeměně pozitronia na dvojici stejných fotonů γ . Určete energii E_γ a vlnovou délku λ_γ každého z fotonů, které vzniknou při anihilaci pozitronia.

Úlohu řešte obecně a poté pro dané hodnoty veličin. Chybějící konstanty vyhledejte v MF tabulkách nebo na internetu.

4. Nanováhy

V roce 2012 byl publikován článek, kde Adrian Bachtold se svou výzkumnou skupinou na Katalánské univerzitě v Barceloně pomocí uhlíkových nanotrubic uskutečnil měření hmotnosti atomů xenonu s hmotností 218 yoktogramů s přesností jednotky yoktogramu. Vznikla tak možnost změřit hmotnost jednoho protonu.



Obr. 3

Uhlíková nanotrubička je tenké duté vlákno s vnějším průměrem o délce několika nanometrů (nm), s nízkou průměrnou hustotou a vysokým modulem pružnosti v tahu E . Díky tomu je pružnější až milionkrát více než běžná pera. Uhlíkové nanotrubičky se vyznačují vysokou elektrickou vodivostí v podélném směru.

Při konstrukci vah byla nanotrubička umístěna mezi dvě mikrodestičky S a D (obr. 3 vlevo). Nanotrubička byla použita jako podélná pružina, která může kmitat ve směru kolmém na podélnou osu nanotrubičky. Vznikl tak mikroskopický oscilátor s frekvencí f_0 vlastních příčných kmitů. Pokud se na nanotrubičce zachytí měřený atom, změní se frekvence kmitů tohoto oscilátoru. Ze změny frekvence lze určit hmotnost zachyceného atomu.

- Uvažujme zjednodušený model kmitající soustavy podle obr. 3 vpravo. Tělíčko s hmotností m je upevněno dvěma pružnými vlákny o délce a a délkové hmotnosti μ mezi body A a B (obr. 3 vpravo). Síla napínající vlákno v klidové poloze je dána počátečním relativním prodloužením ε vzhledem na jejich nezatíženou délku a_0 .
Po vychýlení tělíčka ve svislém směru z rovnovážné polohy a jeho uvolnění začne soustava kmitat kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že úseky AC a CB vlákna zůstávají přímé při pohybech tělíčka a že modul pružnosti v tahu je E . Uvažujte velmi malé výchylky tělíčka z rovnovážné polohy. Určete frekvenci f kmitů soustavy.
- Pomocí modelu z části a) určete frekvenci f_0 kmitů nezatížené nanotrubičky ($m = 0$) s počátečním relativním prodloužením $\varepsilon = 0,10$, a frekvenci f kmitů se zachyceným atomem xenonu v jejím středu při délce nanovlákn $l = 2a = 1,0 \mu\text{m}$, průměru $d = 1,0 \text{ nm}$, délkové hmotnosti $\mu = 1,0 \cdot 10^{-15} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ a modulu pružnosti v tahu $E = 900 \text{ GPa}$.

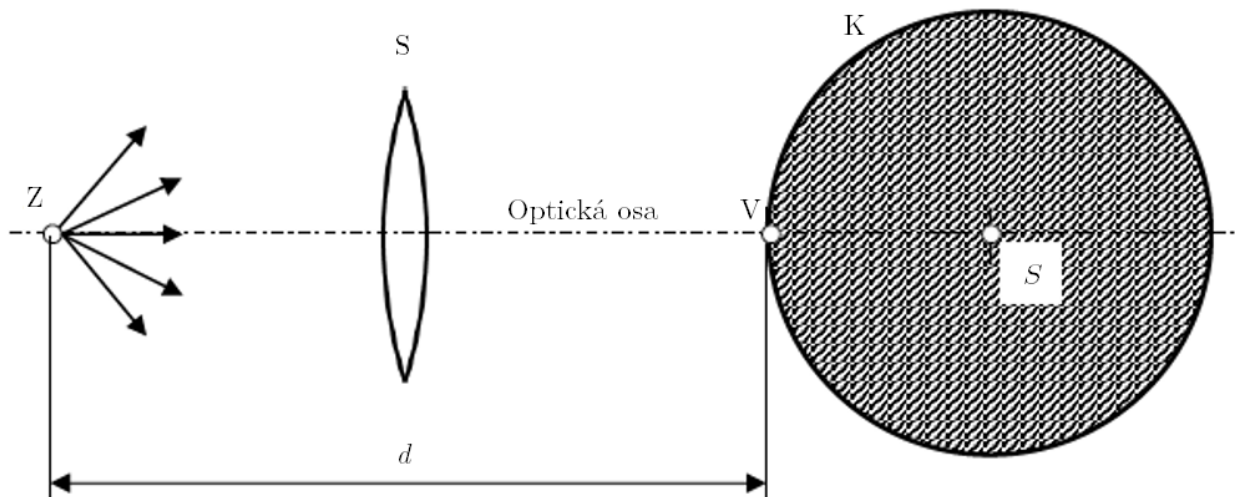
Posuďte, zda se přítomnost atomu xenonu na nanotrubičce projeví měřitelnou změnou frekvence.

Poznámky: Měření relativní změny frekvence 1 ppm je možné běžnými prostředky (ppm – parts per million, tj. jedna miliontina). Vlákno má hmotnost srovnatelnou s hmotností tělíčka, a proto je nutné uvažovat vliv jeho hmotnosti na kmity soustavy. Další potřebné informace vyhledejte na internetu.

5. Odraz od lesklé koule

Před lesklou koulí K s poloměrem $R = 25$ mm se nachází bodový zdroj Z ve vzdálenosti $d = 80$ mm od bodu V na povrchu koule, viz obr. 4. Do středu vzdálenosti ZV je umístěna spojná čočka S s ohniskovou vzdáleností $f = 30$ mm, přičemž přímka ZV představuje optickou osu soustavy. Světlo zdroje prochází čočkou a dopadá na lesklý povrch koule, od kterého se dokonale odráží.

Zkonstruuje co nejpřesněji optickou soustavu a vyznačte v ní chod významných paprsků potřebných pro určení polohy obrazu zdroje.



Obr. 4

- Zkonstruuje obrazy zdroje Z postupně tak, jak je zobrazují jednotlivé části soustavy při průchodu paprsků soustavou. Zkonstruuje obraz Z_1 zdroje Z vytvořený čočkou, obraz Z_2 zdroje vytvořený odrazem světla od povrchu koule a obraz Z_3 zdroje vytvořený po zpětném průchodu odraženého světla čočkou. Uveďte vlastnosti (skutečný – zdánlivý) jednotlivých obrazů. Postup konstrukce obrazů stručně popište.
- Z nákresu soustavy určete graficky přibližné vzdálenosti z_2 a z_3 obrazů Z_2 a Z_3 zdroje světla od bodu V na povrchu koule.

Při řešení úlohy uvažujte tenkou čočku a tenké zrcadlo, jehož ohnisko odrazové kulové plochy leží v polovině úsečky VS . Rovněž uvažujte, že se všechny paprsky nacházejí v paraxiálním prostoru.

6. Praktická úloha: Ověření Stefanova–Boltzmannova zákona

Teorie: Vlákno žárovky se přibližně chová jako černé těleso, jehož intenzita vyzařování je určena Stefanovým–Boltzmannovým zákonem:

$$M_e = \frac{\Phi_e}{S} = \sigma T^4, \text{ kde } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

Zářivý tok žárovky Φ_e je prakticky stejný jako její elektrický příkon

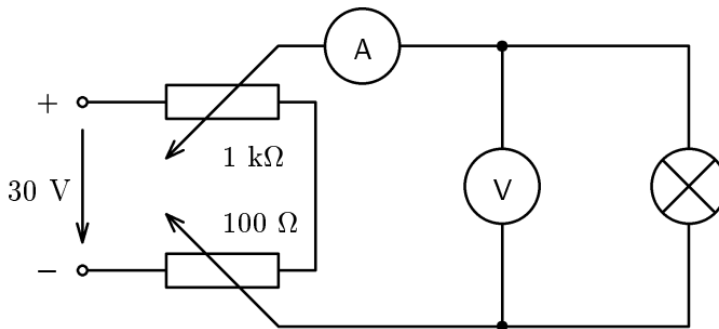
$$P = UI.$$

Předpokládejte, že závislost odporu vlákna žárovky na teplotě je přibližně lineární a můžeme ji vyjádřit vztahem

$$R = R_1 (1 + \alpha \Delta t),$$

kde R_1 je odpor při vztažné teplotě t_1 , $\Delta t = t - t_1$ je změna teploty a α je teplotní součinitel odporu. Zvolíme-li vztažnou teplotu mezi 15°C a 25°C, má wolframové vlákno, ze kterého je vlákno žárovky vyrobeno, teplotní součinitel odporu

$$\alpha = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$



Obr. 5

V naší úloze použijeme malou žárovku s jmenovitými hodnotami napětí a proudu

$$U_{jm} = 24 \text{ V}, \quad I_{jm} = 0,1 \text{ A},$$

která se běžně prodává v elektrotechnických prodejnách (signální nebo také telefonní žárovka 24 V/100 mA).

Úkol y:

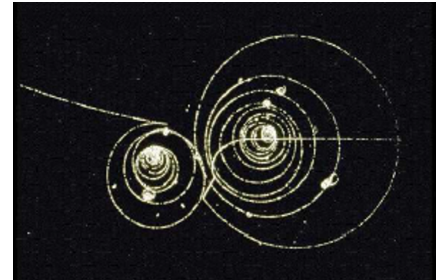
- 1) V zapojení podle obr. 5 změřte pečlivě závislost proudu, který prochází žárovkou, na připojeném napětí. Z výsledků měření určete, jak se s rostoucím napětím mění příkon žárovky a odpor jejího vlákna.
- 2) Sestrojte graf závislosti odporu žárovky na napětí a z něj stanovte odpor vlákna při nulovém napětí, kdy je teplota vlákna stejná jako teplota okolí.
- 3) Určete, jak se s rostoucím napětím mění teplota vlákna žárovky. Potřebný vztah odvoďte. Za vztažnou teplotu zvolte teplotu laboratoře.
- 4) Ověřte, že při napětí větším než 5 V, kdy se téměř celá dodaná energie vyzáří, je poměr P/T^4 konstantní.
- 5) Stanovte plošný obsah části povrchu dokonale černého tělesa, která by při zjištěných teplotách zářila stejně jako daná žárovka.

[illegible]

Poznámka: První část měření (do 1 V) slouží především k určení odporu žárovky R_1 při teplotě okolí; v druhé části (od 5 V) ověříme Stefanův–Boltzmannův zákon.

7. Mlžná komora

Mlžná komora slouží ke zviditelnění pohybu částic s nábojem. V komoře je přesycená pára, která na částicích kondenzuje. Vzniká tak stopa odpovídající trajektorii částice. Nachází-li se komora v homogenním magnetickém poli, pohybují se nabitě částice po zakřivených trajektoriích. Na obr. 6 je zaznamenaná trajektorie částic, pořízená v mlžné komoře evropského střediska jaderného výzkumu CERN. Analýzou těchto trajektorií lze částice identifikovat a zkoumat různé interakce.



Obr. 6

Uvažujme mlžnou komoru, ve které se nacházejí neutrální atomy radioaktivního radia ^{226}Ra . Tento izotop se používá jako α -zářič. Předpokládejme, že částice je z jádra emitována kolmo na směr vektoru magnetické indukce.

- Předpokládejte, že se částice uvolní z jádra rychlostí v . Popište trajektorii částice a určete její základní parametry. Vysvětlete, proč má mlžná stopa částice tvar spirály – viz obr. 6. Pokud je pravá spirála na obr. 6 stopa částice s kladným nábojem, určete směr indukce $\mathbf{B}$ magnetického pole. Svou odpověď fyzikálně zdůvodněte.
- Napište rovnici reakce, při které dochází k emisi částice α z atomu ^{226}Ra . Jaký je název nově vzniklého atomového jádra?

Při uvedené reakci se uvolní energie $E = 4,87 \text{ MeV}$. Předpokládejte, že celá energie E představuje kinetickou energii částice α .

- V mlžné komoře, která se nachází v magnetickém poli s indukcí $B = 10,0 \text{ T}$, se objeví stopa α -částice a stopa vzniklého iontu. Určete počáteční poloměr křivosti obou stop a počáteční úhlové rychlosti obou částic.