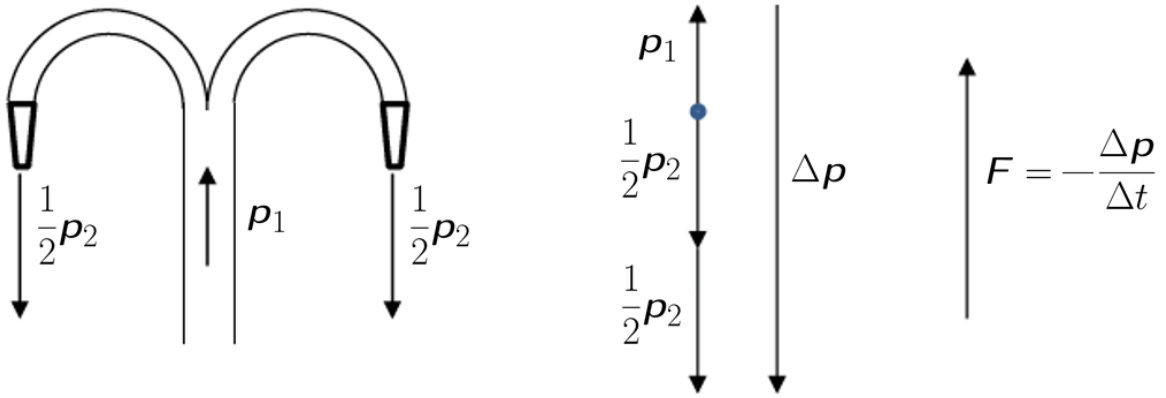
Řešení úloh 1. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Úlohy navrhli I. Čáp (1, 2, 5, 7), F. Studnička (4), J. Šlégr (3), P. Šedivý (6)

1.a) V ohybu trubic JETLEV na zádech člověka dochází ke změně hybnosti vody na opačnou. Rozdíl vektorů hybnosti je roven impulsu síly, která v tomto případě působí směrem vzhůru. Aby se zesílil účinek vodního proudu, jsou hadice zakončeny tryskami (zúženími), a tím se výrazně zvýší rychlost (a tedy i hybnost) vody stříkající dolů. Takto vyvolaná síla vynese člověka i se zařízením JETLEV a hadicí nahoru. **1 bod**

Pro fyzikální výpočet budeme předpokládat, že v hadicích a potrubích jde o ustálené proudění vody. Základní vztahy, které v tomto případě platí, jsou rovnice spojitosti toku a Bernoulliho rovnice.



Obr. R1

1 bod

b) Jestliže je vstupní hadice čerpadla na úrovni rozlehlé hladiny, pak pro nasávání vody platí rovnost

$$p_a = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1, \tag{1}$$

kde p_a je atmosférický tlak na hladině, v_1 rychlost vody ve vstupním otvoru hadice a p_1 tlak ve vstupní hadici. Za čerpadlem je tlak vody p_2 a vzhledem ke stejnému průměru hadic je rychlost vody v_1. Ve výstupním otvoru trysky je tlak p_a a rychlost v_2, a platí

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_a. \tag{2}$$

Výkon čerpadla pro stejný průměr vstupního a výstupního otvoru

$$P = F_2 v_2 - F_1 v_1 = p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1 = Q_v(p_2 - p_1).$$

Pomocí rovnice kontinuity

$$Q_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

a rovností (1) a (2) můžeme psát

$$p_2 - p_a = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right), \qquad p_a - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2, \tag{3}$$

Z výrazů (3) určíme rozdíl tlaků mezi vstupem a výstupem čerpadla

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{4Q_v}{\pi d_2^2}\right)^2$$

a výkon čerpadla za těchto podmínek

$$P = Q_v(p_2 - p_1) = \frac{8}{\pi^2 d_2^4}\,\rho\, Q_v^3.$$

Pro dané hodnoty $P = 19{,}7$ kW. **2 body**

V trysce dochází ke zrychlení proudění a tedy změně hybnosti. Na trysku působí síla reakce

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v_2 - v_1) = \rho Q_v(v_2 - v_1) = \rho Q_v \left(\frac{4Q_v}{\pi d_2^2} - \frac{4Q_v}{\pi d_1^2}\right) = \frac{4\rho}{\pi}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right) Q_v^2.$$

Pro dané hodnoty $F = 1{,}29$ kN. **2 body**

c) Situace je podobná jako v části b), s tím rozdílem, že přitékající voda a tryskající voda mají opačný směr a trysky na JETLEVu jsou dvě. Reakční síla směrem vzhůru je

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v_2 + v_1) = \rho Q_v \left(\frac{4Q_v}{\pi d_2^2} + \frac{4Q_v}{\pi d_1^2}\right) = \frac{4\rho}{\pi}\left(\frac{1}{2d_2^2} + \frac{1}{2d_1^2}\right) Q_v^2.$$

Z této rovnice určíme potřebný průtok Q_v vody

$$Q_v = \sqrt{\frac{\pi F}{4\rho\left(\frac{1}{2d_2^2} + \frac{1}{d_1^2}\right)}}. \tag{4}$$

Síla F je v rovnováze s tíhovou silou člověka se zařízením a hadicí plnou vody

$$F = mg + \mu h g + S_1 h \rho g. \tag{5}$$

Voda se nasává pod skútrem, ve vstupním potrubí čerpadla je tlak p_1 a rychlost proudění vody v_1. Potom pro proudění vody do vstupního potrubí platí

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = p_a. \tag{6}$$

Na výstupu čerpadla je tlak vody p_2 a rychlost proudění vody v_1. Na výstupu trysky ve výšce h je rychlost proudění vody v_2 a v otevřeném ústí obou trysek tlak p_a. Platí

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h + p_a. \tag{7}$$

Výkon P čerpadla je

$$P = Q_v(p_2 - p_1) = Q_v\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h\right) = Q_v\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q_v}{2S_2}\right)^2 + \rho g h\right] \textbf{2 body}$$

kde rozdíl tlaků $p_2 - p_1$ jsme vyjádřili odečtením rovností (7) a (6).

Po dosazení (4) a (5) do výrazu pro výkon P čerpadla máme hledaný výsledek

$$P = \sqrt{\frac{g\,(m + \mu h + S_1 h\rho)}{\rho\left(\dfrac{1}{2S_2} + \dfrac{1}{S_1}\right)}}\left[\frac{(m + \mu h + S_1 h\rho)}{8S_2^2\left(\dfrac{1}{2S_2} + \dfrac{1}{S_1}\right)} + \rho h\right] = 42\ \mathrm{kW}.$$

2 body

Poznámka: Nejvýkonnější JETLEVy mají výkon až 140 kW a na vodní hladině dosahují rychlostí až 100 km · h^{-1}.

2.a) Látkové množství plynu určíme ze stavové rovnice ideálního plynu

$$n_0 = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{p_0 l_0 S_0}{RT_0}.$$

1 bod

Pro dané hodnoty a $T_0 = (20 + 273)$ K máme $n_0 = 6{,}2 \cdot 10^{-2}$ mol. **0,5 bodu**

b) Vzduch se adiabaticky stlačí, až dosáhne tlaku

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}.$$

Pro adiabatický děj platí rovnice

$$p_0 V_0^\kappa = p_1 V_1^\kappa, \quad \text{resp.} \quad p_0 l_0^\kappa = p_1 l_1^\kappa,$$

odkud máme

$$l_1 = l_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\kappa} = l_0\left(\frac{p_0 S}{p_0 S + mg}\right)^{1/\kappa} = 26{,}4\ \mathrm{cm}.$$ **1 bod**

Použijeme-li stavovou rovnici ideálního plynu $pV = nRT$, po vyloučení objemu ze stavové rovnice pro adiabatický děj dostáváme

$$T_1 = T_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_0\left(1 + \frac{mg}{p_0 S}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

1 bod

Pro $T_0 = (20 + 273)$ K máme $T_1 = 308$ K, tj. $t_1 = 35$ °C. **1 bod**

c) Po dosažení polohy (1) se otevře ventil a při posouvání pístu do polohy (2) vzduch uniká přes ventil do okolí a expanduje na tlak p_0. Během tohoto děje vzduch ve válci má stálý tlak p_1 a protože nedochází k jeho stlačování, má i stálou teplotu T_1. Objem vzduchu klesá z hodnoty $V_1 = S_0 l_1$ na hodnotu $V_2 = S_0 l_2$. **2 body**

d) Z původního látkového množství n_0 tak zůstane ve válci vzduch s látkovým množstvím

$$n_3 = n_0 \frac{l_2}{l_1}.$$

Pro dané hodnoty $n_3 = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ mol. **0,5 bodu**

Ze stavu (2) se stavovými veličinami $p_1, T_1, V_2 = S_0 l_2$ přejde vzduch do stavu

s objemem $V_3 = S_0 l_0$. Ze stavové rovnice pro adiabatický děj dostáváme

$$p_1 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa, \quad \text{odkud} \quad p_3 = p_1 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\kappa = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{l_2}{l_0}\right)^\kappa, \quad \textbf{1 bod}$$

$$T_1 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1}, \quad \text{odkud} \quad T_3 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1} = T_0 \left(1 + \frac{mg}{p_0 S}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{l_2}{l_0}\right)^{\kappa-1}.$$

1 bod

Pro dané hodnoty $p_3 = 26$ kPa, $T_3 = 199$ K, $t_3 = -74$ °C. **1 bod**

3.a) Soustava dvou obíhajících částic o hmotnosti m_e bude mít těžiště ve středu spojnice. To lze ukázat např. momentovou větou:

$$m_1(x_T - x_1) = m_2(x_2 - x_T).$$

Dosazením

$$m_1 x_T = m_2(d - x_T) \quad \Rightarrow \quad x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d,$$

kde d je vzdálenost částic. Pro $m_1 = m_2$ dostaneme $x_T = \dfrac{d}{2}$. **1 bod**

Celkový moment hybnosti soustavy je $L_1 = \hbar$ a podílejí se na něm dvě částice:

$$L_1 = 2 m_e v \quad \Rightarrow \quad r = \frac{L_1}{2 m_e v}.$$

Stejně jako v Bohrově modelu atomu vodíku určíme rychlost pomocí rovnováhy elektrostatické a dostředivé síly:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{(2r)^2}.$$

Řešením vzhledem k v obdržíme

$$v^2 = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{m_e r}, \quad v = \sqrt{\frac{q_e^2}{16\pi\varepsilon_0 m_e r}}.$$

Dosadíme do výrazu pro poloměr a získáme

$$r = \frac{L_1}{2m_e} \cdot \sqrt{\frac{16\pi\varepsilon_0 m_e r}{q_e^2}} \quad \Rightarrow \quad d = 2r = \frac{8\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 1{,}05 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

3 body

b) Potenciální energie mezi částicemi ve vzdálenosti $2r$ je:

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{2r} = -\frac{q_e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -13{,}7 \text{ eV}.$$ **1 bod**

Kinetická dvou částic při pohybu oběžnou rychlostí v je

$$E_k = 2\frac{1}{2} m_e v^2 = m_e \cdot \frac{q_e^2}{16\pi\varepsilon_0 m_e r} = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 r} = 6{,}85 \text{ eV}.$$ **1 bod**

Je vidět, že vztah, který je důsledkem viriálové věty, platí:

$$E_p = -2E_k.$$ **1 bod**

Vazebná energie jako součet kinetické a potenciální energie je

$$E_{\text{vazebná}} = E_k + E_p = -6{,}85 \text{ eV}. \qquad \textbf{1 bod}$$

c) Klidová hmotnost elektronu odpovídá energii $E_0 = m_e c^2 = 512$ keV. Oproti tomu je vazebná energie naprosto zanedbatelná, takže budeme pokračovat s touto hodnotou.
Při anihilaci se hmotnost každé částice přemění na energii jednoho fotonu:

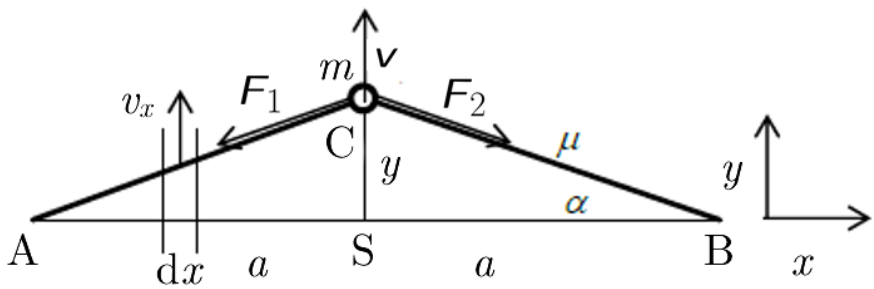
$$E_0 = m_e c^2 = hf = h\frac{c}{\lambda}.$$

Proto platí

$$\lambda = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{h}{m_e c} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\text{m} = 2{,}43 \text{ pm}. \qquad \textbf{2 body}$$

Místo anihilace tak opouštějí dva gama fotony o vlnové délce 2,43 pikometru.

4.a) Zjednodušený model je na obrázku R2:



Obr. R2

Při kmitavém pohybu se zachovává mechanická energie soustavy. Potenciální energie je dána deformací vlákna, kinetická energie pohybem vlákna a tělíska.
Vlákno je na začátku prodloužené, přičemž $a = a_0(1+\varepsilon)$, a jeho deformační energie

$$E_{p0} = \frac{1}{2}k\,(a - a_0)^2,$$

kde k je tuhost vlákna daná Hookovým zákonem

$$\frac{F_0}{S} = E\frac{a - a_0}{a_0} = E\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F_0}{a - a_0} = \frac{SE}{a_0},$$

kde S je obsah průřezu vlákna, a_0 původní délka nezatíženého vlákna a εa_0 jeho počáteční prodloužení.
Po vychýlení tělíska z polohy S je délka vlákna

$$l = \sqrt{a^2 + y^2},$$

a deformační energie

$$E_p = \frac{1}{2}k\,(l - a_0)^2.$$

Změna potenciální energie obou vláken vyvolaná vychýlením tělíska z rovnovážné

polohy

$$\Delta E_p = 2(E_p - E_{p0}) = 2\left[\frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+y^2}-a_0\right)^2 - \frac{1}{2}k(a-a_0)^2\right],$$

a po úpravě

$$\Delta E_p = k\left[(a^2+y^2) - 2a_0\sqrt{a^2+y^2} - a^2 + 2a_0 a\right].$$

Pro malé výchylky nahradíme odmocninu podle přibližného vztahu pro $y \ll a$

$$\sqrt{a^2+y^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2} = a\left(1+\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}\right),$$

a máme

$$\Delta E_p = k\left(1-\frac{a_0}{a}\right)y^2 = \frac{1}{2}k^* y^2.$$

2 body

Dostali jsme kvadratickou funkci s efektivní tuhostí soustavy

$$k^* = 2k\left(1-\frac{a_0}{a}\right) = 2k\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right) = \frac{SE}{a_0}\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2\varepsilon SE}{a}.$$

Jestliže se tělísko pohybuje rychlostí $v = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, je jeho kinetická energie

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2.$$

1 bod

Určíme kinetickou energii E_{k2} vlákna. Vlákno rozdělíme na malé úseky s délkou $\mathrm{d}x$ (obr. R2), které se pohybují rychlostí $v_x = \frac{x}{a}v$ a mají kinetickou energii

$$\mathrm{d}E_{k2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v_x^2 = \frac{1}{2}\,\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{x^2}{a^2}v^2.$$

Celkovou kinetickou energii vlákna získáme integrací tohoto vztahu

$$E_{k2} = 2\int_0^a \frac{1}{2}\mu\frac{x^2}{a^2}v^2\,\mathrm{d}x = \mu\frac{v^2}{a^2}\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}\mu a v^2.$$

1 bod

Celková kinetická energie soustavy

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{3}\mu a v^2 = \frac{1}{2}\left(m+\frac{2}{3}a\mu\right)v^2 = \frac{1}{2}m^* v^2.$$

Efektivní hmotnost kmitavé soustavy je

$$m^* = m + \frac{2}{3}a\mu.$$

1 bod

Frekvence kmitů soustavy s efektivní tuhostí k^* a efektivní hmotností m^*

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2SE\varepsilon}{a(3m+2a\mu)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\pi d^2 E\varepsilon}{2a(3m+2a\mu)}}.$$

2 body

Pro kmity nanotrubice podle zjednodušeného modelu je podle výsledného vztahu

pro $m = 0$ a dané hodnoty veličin

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\pi d^2 E\varepsilon}{l^2\mu}} = 4{,}635 \text{ GHz}.$$

0,5 bodu

Uvažujeme-li zatížení nanotrubice atomem xenonu s hmotností $m = A_{r\mathrm{Xe}} \cdot u = 2{,}18 \cdot 10^{-25}$ kg, je frekvence vlastních kmitů

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\pi d^2 E\varepsilon}{l(3m + l\mu)}} = 4{,}633 \text{ GHz}.$$

0,5 bodu

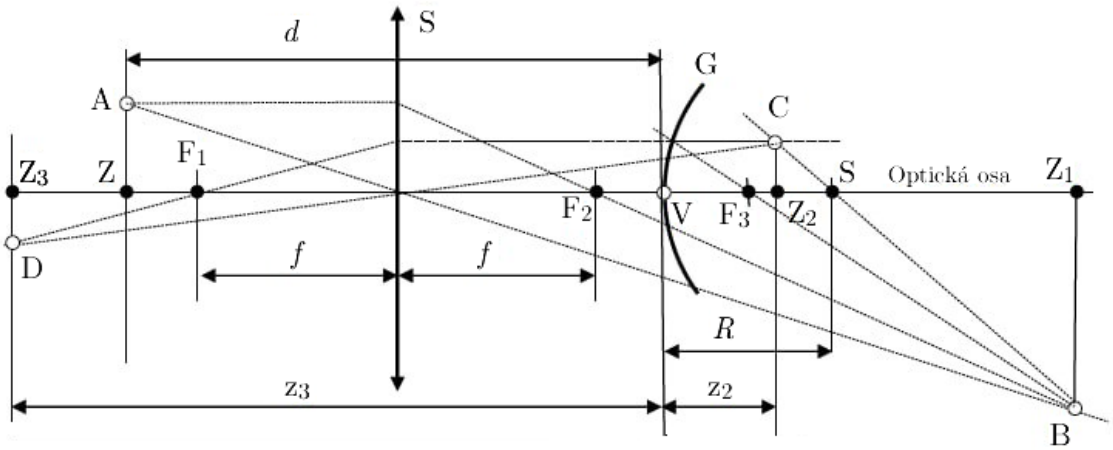
Rozdíl je patrný až na čtvrté platné číslici. Přesněji rozdíl posoudíme podle relativní změny frekvence vlivem zachyceného atomu Xe

$$\delta f = \frac{f - f_0}{f_0} = \frac{f}{f_0} - 1 = \sqrt{\frac{l\mu}{3m + l\mu}} - 1 = -4{,}3 \cdot 10^{-4}.$$

2 body

Při relativní přesnosti měření frekvence 1 ppm (10^{-6}, parts per million) by bylo možné identifikovat částici s hmotností o dva řády menší, tj. jednotlivý proton (jádro vodíku).

5.a) Aby bylo možné zkonstruovat obrazy zdroje Z, který se nachází na optické ose, je potřebné použít bod A mimo osu v předmětové rovině. Pomocí dvou význačných paprsků, paprsku procházejícího středem čočky a paprsku rovnoběžného s osou, který se láme do ohniska F_2, zkonstruujeme obraz B bodu A, a tak získáme obrazovou rovinu, v níž se nachází obraz Z_1 zdroje Z, obr. R3.



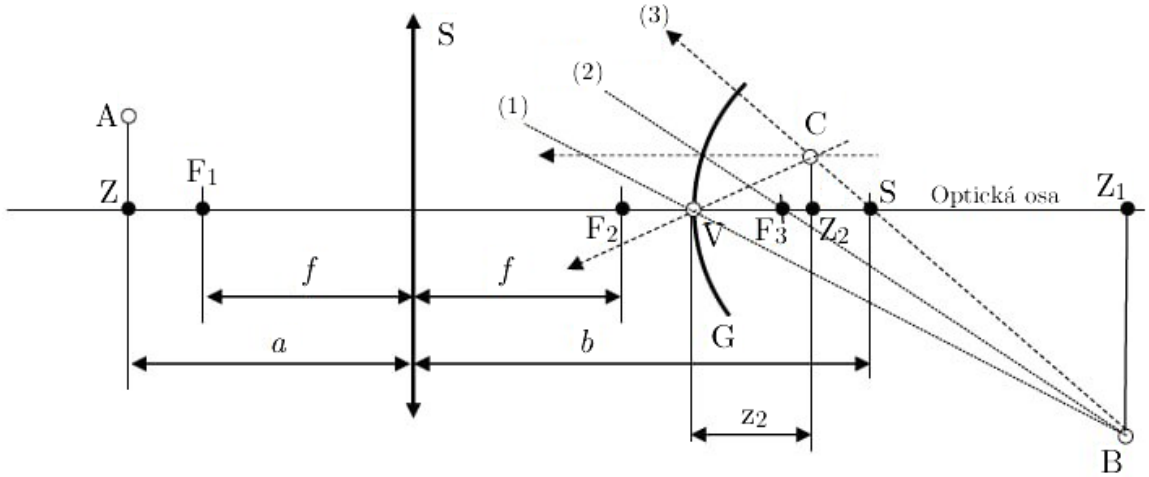
Obr. R3

2 body

Obraz Z_1 je reálný (a převrácený). **2 body**

Bod B je předmětem pro zobrazení odrazovou plochou G. Pro lepší názornost je vytvoření obrazu C ukázáno na samostatném obrázku R4. Pro zobrazení obrazu C předmětu B lze použít některé charakteristické paprsky: paprsek (1) dopadající do vrcholu V se odráží symetricky vůči ose, paprsek (2) směřující do ohniska F_3

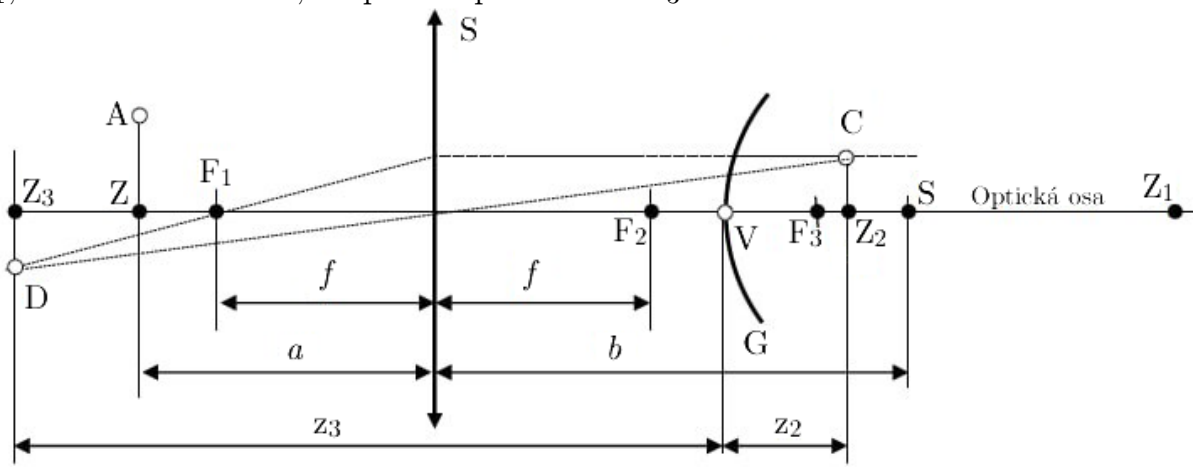
se odráží rovnoběžně s optickou osou, paprsek (3) dopadající kolmo na povrch zrcadla, tj. na střed S, se odráží zpět. V obrazové rovině procházející bodem C kolmo k ose a na optické ose se nachází obraz Z_2 zdroje.



Obr. R4

Obraz Z_2 je zdánlivý (a přímý). **2 body**

Obraz Z_2, resp. C, je předmětem pro zpětné zobrazení čočkou. Toto zobrazení je pro větší názornost vybráno do samostatného obrázku R5. Pomocí paprsku jdoucího středem čočky a rovnoběžného s optickou osou, který se láme do ohniska F_1, získáme obraz D, resp. na optické ose Z_3.



Obr. R5

Obraz Z_3 je skutečný (reálný). **2 body**

b) Přibližné vzdálenosti jsou $z_2 = 17$ mm a $z_3 = 97$ mm.

2 body

6. Absolutní teplotu vlákna žárovky T určíme ze vztahu

$$T = T_1 + \frac{R - R_1}{\alpha R_1},$$

kde T_1 je teplota okolí.

Ukázka hodnot naměřených a vypočtených při teplotě $T_1 = 295{,}7\,\mathrm{K}$ ($t_1 = 22{,}5°\mathrm{C}$) :

U/V	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	5,0	10	15	20	25
I/mA	2,65	5,2	9,2	12,0	15,5	21	50	75	95	112,5	128
R/Ω	18,9	19,2	21,7	25,0	32,2	47,6	100	133	158	178	191
P/mW	0,133	0,520	1,84	3,6	7,75	21	250	750	1425	2250	3275
T/K	300,2	304,7	335,5	375,6	464,7	653,4	1296	1706	2008	2252	2468
$P \cdot T^{-4}/10^{-14}$	1,63	6,0	14,5	18,1	16,6	11,5	8,84	8,85	8,76	8,74	8,63

Z grafu závislosti odporu žárovky na napětí byla stanovena hodnota

$$R_1 = 18{,}5\ \Omega.$$

Poměr P/T^4 je při napětí větším než 5 V prakticky konstantní a má průměrnou hodnotu

$$8{,}76 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{W \cdot K^{-4}}.$$

Tomu by u černého tělesa odpovídala část povrchu o plošném obsahu

$$S = \frac{P}{\sigma T^4} = 1{,}55 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2} = 1{,}6\ \mathrm{mm^2}.$$

7.a) Jestliže se částice pohybuje v magnetickém poli s indukcí B, působí na ni Lorentzova síla

$$F = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

kde Q je náboj částice. **1 bod**

Síla F je kolmá na směr rychlosti $\boldsymbol{v}$ a na vektor $\boldsymbol{B}$. Je-li vektor $\boldsymbol{v}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{B}$, pohybuje se částice v rovině kolmé na $\boldsymbol{B}$. Protože síla F je kolmá na směr pohybu (vektor $\mathbf{v}$), je pohyb rovnoměrný a zakřivený, přičemž poloměr křivosti trajektorie částice určíme ze vztahu pro normálovou (dostředivou) složku síly, resp. zrychlení:

$$F = QvB = m\frac{v^2}{R}.$$

Odtud určíme poloměr křivosti trajektorie a úhlovou rychlost

$$R = \frac{mv}{QB}, \qquad \omega_c = \frac{v}{R} = \frac{QB}{m}. \tag{2}$$

1 bod

Je-li hybnost částice mv konstantní, je poloměr R konstantní a trajektorie částice je kružnice. Při rovnoměrném pohybu po kružnici je velikost úhlové rychlosti rovna velikosti úhlové frekvence pohybu po kruhové trajektorii, která se nazývá cyklotronová úhlová frekvence.

Stopa částice v mlžné komoře má tvar spirály, která se uzavírá směrem do středu křivosti. Částice s nábojem, která se pohybuje se zrychlením (v našem případě dostředivým), vyzařuje elektromagnetické záření interakcí s plynem v komoře, čímž ztrácí energii a rychlost. Podle (2) se úhlová rychlost nemění, ale zmenšuje se poloměr křivosti R. Částice se tak pohybuje po spirále s postupným přibližováním ke středu křivosti.

1 bod

Kladná částice vytvářející spirálu vpravo podle obr. 6 v zadání se pohybovala proti směru hodinových ručiček a podle (1) je směr vektoru $\boldsymbol{B}$ za rovinu nákresu.

1 bod

b) α přeměnu jádra ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ popisuje rovnice

$$ {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \quad \rightarrow \quad {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

Vzniklé jádro je radon. Částice α i zbytek atomu mají náboj $Q = \pm 2e$, kde e je elementární náboj.

2 body

c) Při přeměně se zachovává hybnost soustavy

$$ p_\alpha = p_{\mathrm{Rn}}, \quad \text{resp.} \quad mv = Mu, $$

kde $m = 6{,}645 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost α–částice, $M = 3{,}754 \cdot 10^{-25}$ kg hmotnost iontu radonu, v rychlost α–částice a u rychlost iontu radonu.
Celková uvolněná energie je kinetická energie obou částic

$$ E = \frac{p_\alpha^2}{2m} + \frac{p_{\mathrm{Rn}}^2}{2M} = \frac{p_\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right). $$

Odtud máme

$$ p_\alpha = mv = \sqrt{\frac{2E\,mM}{m+M}}. $$

Z (2) vyplývá, že počáteční poloměr zakřivení trajektorie obou částic je stejný

$$ R = \frac{1}{QB}\sqrt{\frac{2E\,mM}{m+M}} = 3{,}15 \text{ cm}. $$

2 body

Úhlové rychlosti obou částic se výrazně liší

$$ \omega_{c\alpha} = \frac{QB}{m}, \qquad \omega_{c\mathrm{Rn}} = \frac{QB}{M}, \quad \text{tzn.} \quad \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega_{c\mathrm{Rn}}} = \frac{M}{m}. $$

Pro dané hodnoty $\omega_{c\alpha} = 4{,}82 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $\quad \omega_{c\mathrm{Rn}} = 8{,}53 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

2 body