Řešení úloh školního kola 66. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2024/2025

Kategorie E a F

FO66EF1-1: Závody slimáků *J. Thomas*

a) Rozdíl rychlostí mezi Emilem a posledním z ostatních slimáků je

$$\Delta v = \frac{120\,\mathrm{cm}}{15\,\mathrm{min}} = 8{,}0\,\mathrm{cm/min}.$$

Poslední z ostatních slimáků tedy leze rychlostí $v_1 = 15\,\mathrm{cm/min} - 8{,}0\,\mathrm{cm/min} = 7{,}0\,\mathrm{cm/min}$. **4 body**

b) Za první $t_1 = 4$ hodiny $= 240\,\mathrm{min}$ vyleze Emil rychlostí $v = 5\,\mathrm{cm/min}$ do výšky

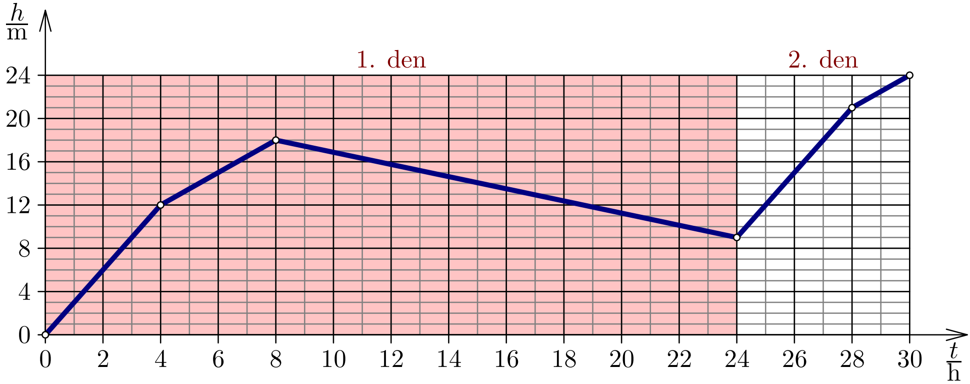
$$h_1 = vt_1 = 5\,\mathrm{cm/min} \cdot 240\,\mathrm{min} = 1\,200\,\mathrm{cm} = 12\,\mathrm{m}.$$

Ve druhých 4 hodinách, v nichž se pohybuje rychlostí $v' = 0{,}5v = 1{,}5\,\mathrm{m/h}$, ještě přidá

$$h_2 = v't_1 = 0{,}5vt_1 = 0{,}5h_1 = 0{,}5 \cdot 12\,\mathrm{m} = 6{,}0\,\mathrm{m}.$$

Celkem vyleze do výšky $h = h_1 + h_2 = 12\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}$. Při spánku pak klesne o $h/2 = 9\,\mathrm{m}$. Druhý den bude po prvních 4 h ve výšce $9\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{m} = 21\,\mathrm{m}$. Na vrchol Bílé skály se dostane druhý den během druhé fáze lezení. Na jejím začátku mu scházelo $\Delta h = 24\,\mathrm{m} - 21\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$, za 1 hodinu vyleze o 1,5 m výše, na vrchol vyleze za 2 hodiny v této fázi, druhý den v 6. hodině trénování (celkem po 30 h = 1 800 min od začátku tréninku). **6 bodů**

Možné grafické řešení je na obr. 1.



Obr. 1: K úloze FO66EF1-1

FO66EF1-2: Popletená pohádka *J. Jírů*

a) Graf pro první a druhý úsek pohybu Mařenky sestrojíme přímo podle zadání, graf spojuje body [0 min, 0 m], [10 min, 800 m] a [18 min, 500 m]. Její rychlost na 3. úseku znamená, že za 1 minutu uběhne dráhu $2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 60\,\mathrm{s} = 150\,\mathrm{m}$, neboli např. za 10 minut dráhu 1 500 m. Proto z bodu [18 min, 500 m] sestrojíme polopřímku procházející např. bodem [28 min, 2 000 m]. **3 body**

Jeníček ujde za 1 min dráhu

$$6{,}0\,\mathrm{km/h}\cdot\frac{1}{60}\,\mathrm{h} = 0{,}1\,\mathrm{km} = 100\,\mathrm{m},$$

neboli např. za 10 minut dráhu 1 000 m. Spojíme body [0 min, 3 200 m] a [16 min, 3 200 m], z druhého sestrojíme polopřímku procházející např. bodem [26 min, 2 200 m]. Průsečík polopřímek [28 min, 2 000 m] určuje čas a místo setkání. Graf společné cesty dokončíme podle zadání spojením bodů [28 min, 2 000 m], [32 min, 2 000 m] a [52 min, 3 200 m]. **3 body**

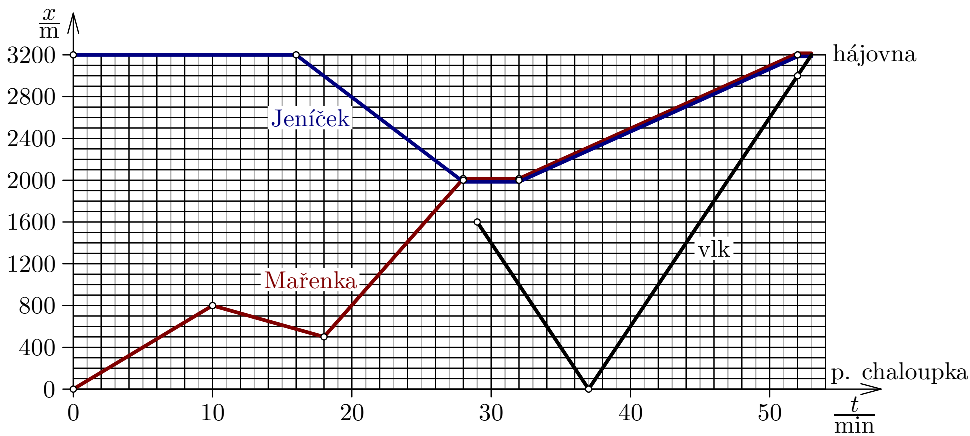
Pro vlka vyznačíme výchozí bod [29 min, 1 600 m]. Vlk uběhne za 1 minutu dráhu

$$12\,\mathrm{km/h}\cdot\frac{1}{60}\,\mathrm{h} = 0{,}2\,\mathrm{km} = 200\,\mathrm{m},$$

neboli např. za 5 min dráhu 1 000 m. Kdyby se rozběhl k hájovně, jeho graf by protnul graf Jeníčka a Mařenky, proto musel běžet k perníkové chaloupce, odkud poté běžel opačným směrem k hájovně. Proto z jeho výchozího bodu sestrojíme polopřímku procházející bodem [29 min, 1 600 m] a [34 min, 600 m], podobně z průsečíku s časovou osou [37 min, 0 m] vedeme polopřímku bodem [42 min, 1 000 m]. **3 body**

Příklad grafu je na obr. 2.

b) Jelikož se grafy vlka a dětí neprotnuly, vlk se cestou ani s jedním z nich nesetkal. **1 bod**



Obr. 2: K úloze FO66EF1-2

FO66EF1-3: Autobus jede do kopce *FO SR, L. Richterek*

a) Celková hmotnost autobusu s $n = 20$ cestujícími a řidičem bude

$$m_1 = m + nm_0 = 8\,000\,\mathrm{kg} + 20\cdot 70\,\mathrm{kg} = 9\,400\,\mathrm{kg}.$$

Potřebný výkon autobusu odhadneme ze zákona zachování energie; změna polohové energie autobusu s cestujícími bude rovna práci vykonané motorem, neboli

$m_1 gh = P_1 t_1$. Odtud vyjádříme

$$P_1 = \frac{m_1 gh}{t_1} = \frac{9\,400\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 360\,\mathrm{m}}{10 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 55\,272\,\mathrm{W} \doteq 55\,\mathrm{kW}.$$ **3 body**

b) Celková hmotnost autobusu s $2n = 40$ cestujícími bude

$$m_2 = m + 2nm_0 = 8\,000\,\mathrm{kg} + 40 \cdot 70\,\mathrm{kg} = 10\,800\,\mathrm{kg}.$$

Dobu stoupání t_2 určíme z podobné úvahy jako v části a) a získáváme

$$t_2 = \frac{m_2 gh}{P_1} = \frac{10\,800\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 360\,\mathrm{m}}{55\,272\,\mathrm{W}} \doteq 689{,}36\,\mathrm{s} \doteq 690\,\mathrm{s}. \qquad (\doteq 11\,\mathrm{min})$$

3 body

c) Nyní vyjádříme čas jízdy

$$t_3 = \frac{mgh}{P} = \frac{8\,000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 360\,\mathrm{m}}{184\,000\,\mathrm{W}} \doteq 153{,}39\,\mathrm{s} \doteq 150\,\mathrm{s} \doteq 2{,}6\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

Podle serveru mapy.cz (`https://mapy.cz/s/leralokodo`) zjistíme, že trasa měří $s = 4{,}6\,\mathrm{km}$, při daném čase by tak autobus musel jet rychlostí

$$v = \frac{4\,600\,\mathrm{m}}{153{,}39\,\mathrm{s}} \doteq 29{,}989\,\mathrm{m/s} \doteq 108\,\mathrm{km/h}.$$

Vzhledem k počtu zatáček a užší silnici je taková rychlost nereálná, ve skutečnosti autobus nejede na plný výkon, neuvažujeme ani čas na rozjetí a zastavení autobusu. Dodejme, že i z ekologického hlediska by provoz motoru na plný výkon v oblasti národního parku nebyl vhodný. **2 body**

FO66EF1-4: Indiana Jones a mramorová socha *J. Thomas*

a) Z podmínky rovnováhy na páce plyne

$$m_0 ga = mg\,(l - a)\,,$$

odkud vychází

$$m_0 = m\frac{l-a}{a} = 6{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \frac{2{,}0\,\mathrm{m} - 0{,}24\,\mathrm{m}}{0{,}24\,\mathrm{m}} = 44\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

b) Pro objem V_0 sochy celé z mramoru dostáváme

$$V_0 = \frac{m_0}{\varrho_\mathrm{m}} = \frac{44\,\mathrm{kg}}{2\,850\,\mathrm{kg/m^3}} \doteq 0{,}015\,439\,\mathrm{m^3} \doteq 15\,\text{litrů}.$$ **2 body**

c) Lano, na kterém je zavěšena socha, je podle Archimédova zákona napínáno silou

$$F = m_0 g - V\varrho g.$$

Podle podmínky rovnováhy na páce $F\,(l - x) = mgx$ zároveň pro sílu F dostáváme

$$F = mg\frac{x}{l-x} = 6{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot \frac{1{,}62\,\mathrm{m}}{2{,}0\,\mathrm{m} - 1{,}62\,\mathrm{m}} \doteq 250{,}67\,\mathrm{N}.$$

Z velikosti síly pak vyjádříme objem

$$V = \frac{m_0 g - F}{\varrho g} = \frac{44\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} - 250{,}67\,\mathrm{N}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}} \doteq 0{,}018\,421\,\mathrm{m^3} \doteq 18\,\text{litrů}.$$

Objem sochy V je větší, než kdyby byla celá z mramoru V_0 ($V > V_0$). Uvnitř se tedy nachází dutina. **5 bodů**

FO66EF1-5 Skok o tyči *L. Richterek*

a) Při rozběhu získá atlet pohybovou energii. Ta se přemění na energii deformované tyče (ohýbají se i o více než 90°) a nakonec v polohovou energii skokana v nejvyšší poloze. **2 body**

b) Výška těžiště vychází $h_1 = 0{,}57 \cdot 1{,}81\,\mathrm{m} = 1{,}031\,7\,\mathrm{m}$. Pro polohovou energii dostáváme

$$E_{\mathrm{p1}} = mgh_1 = 79\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}031\,7\,\mathrm{m} \doteq 798{,}74\,\mathrm{J} \doteq 800\,\mathrm{J}.$$ **2 body**

c) Pro polohovou energii v nejvyšším bodě vychází

$$E_{\mathrm{p2}} = mgh_2 = 79\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 6{,}26\,\mathrm{m} \doteq 4\,846{,}5\,\mathrm{J} \doteq 4\,800\,\mathrm{J}.$$ **1 bod**

Jak je vidět z obrázku v zadání úlohy, skokan ohne tělo do oblouku, aby těžiště těla leželo co možná nejníže. **1 bod**

d) Vyjdeme ze zákona zachování energie skokana na konci rozběhu a v nejvyšším bodě skoku

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{p2}}.$$

Odtud vyjádříme rychlost v ve tvaru

$$v^2 = 2\frac{E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}}}{m} = 2\frac{mgh_2 - mgh_1}{m} = 2g\left(h_2 - h_1\right).$$

Po dosazení dostáváme

$$v = \sqrt{2g\left(h_2 - h_1\right)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}\,(6{,}26\,\mathrm{m} - 1{,}031\,7\,\mathrm{m})} \doteq 10{,}123\,\mathrm{m/s} \doteq 10\,\mathrm{m/s}.$$

Skokan při rozběhu dosahuje rychlosti okolo 36 km/h. **4 body**

Poznámka: Do přesných úvah bychom mohli započítat i pohybovou a polohovou energii tyče. Parametry tyčí však nejsou stejné, závisí např. na hmotnosti skokana a nejsou běžně dostupné. I přes zjednodušení náš výsledek celkem rozumně odpovídá rychlostem, kterých Armand Duplantis při rozběhu dosahuje. Rychlost 10 m/s odpovídá i hranici extratřídy v běhu na 100 m (viz např. `https://cs.wikipedia.org/wiki/B%C4%9Bh_na_100_metr%C5%AF`).

FO66EF1-6 Šíření rádiového signálu *J. Thomas*

a) Označme $r_{\mathrm{M}} = 1{,}524\,\mathrm{au} \doteq 227{,}99$ miliónů km vzdálenost Marsu od Slunce a $r_{\mathrm{Z}} = 1{,}0\,\mathrm{au} = 149{,}6$ miliónů km. Je-li Mars v konjunkci se Zemí (v poloze 1), je jeho vzdálenost od Země $d_1 = r_{\mathrm{M}} - r_{\mathrm{Z}} = 1{,}524\,\mathrm{au} - 1{,}0\,\mathrm{au} = 0{,}524\,\mathrm{au} \doteq 78\,390\,000\,\mathrm{km}$. Signál k Zemi dorazí za dobu

$$t_1 = \frac{d_1}{c} = \frac{78\,390\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\mathrm{km/s}} \doteq 261{,}30\,\mathrm{s} \doteq 260\,\mathrm{s} \qquad (\doteq 4{,}4\,\mathrm{min}).$$ **2 body**

b) Je-li Mars v opozici se Zemí (v poloze 2), je jeho vzdálenost od Země $d_2 = r_{\mathrm{M}} + r_{\mathrm{Z}} = 1{,}524\,\mathrm{au} + 1{,}0\,\mathrm{au} = 2{,}524\,\mathrm{au} \doteq 377\,590\,000\,\mathrm{km}$. Signál k Zemi dorazí za dobu

$$t_2 = \frac{d_2}{c} = \frac{377\,590\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\mathrm{km/s}} \doteq 1\,258{,}6\,\mathrm{s} \doteq 1\,300\,\mathrm{s} \qquad (\doteq 21\,\mathrm{min}).$$ **2 body**

Poznámka: Převod na minuty není požadován. Uvádíme jej pro srovnání s obecně známým faktem, že světlo se z povrchu Slunce k Zemi šíří asi 8 minut.

c) Označme poloměr Země $R_Z = 6\,378\,\mathrm{km}$ a výšku satelitů nad zemským povrchem $h = 35\,800\,\mathrm{km}$. Satelity obíhají po kružnici o poloměru

$$r = R_Z + h = 6\,378\,\mathrm{km} + 35\,800\,\mathrm{km} = 42\,178\,\mathrm{km}.$$

Protože jsou nad stále stejným místem nad zemským povrchem, je jejich doba oběhu stejná jako otočení Země kolem své osy (tzv. siderický den), tj. přibližně $T = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min} \doteq 23{,}933\,\mathrm{h}$. Pro jejich rychlost tedy platí

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 42\,178\,\mathrm{km}}{23{,}933\,\mathrm{h}} \doteq 11\,073\,\mathrm{km/h} \doteq 11\,000\,\mathrm{km/h}.$$ **3 body**

Poznámka: Rychlost lze vyjádřit i v jiných jednotkách, např. $v \doteq 3{,}1\,\mathrm{km/s} = 3\,100\,\mathrm{m/s}$. Při zaokrouhlení na 2 platné číslice mohou řešitelé použít jako periodu oběhu délku jednoho dne $T = 24\,\mathrm{h}$.

d) Úhlopříčka čtverce 1–2–3–4 má velikost $u = 2r = 2 \cdot 42\,178\,\mathrm{km} = 84\,356\,\mathrm{km}$. Vzdálenost mezi satelity (strana čtverce) měří podle zadání

$$a = \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{84\,356\,\mathrm{km}}{\sqrt{2}} \doteq 59\,649\,\mathrm{km}.$$

Signál z bodu A do bodu B musí urazit vzdálenost

$$s = 2h + 2a = 2 \cdot 35\,800\,\mathrm{km} + 2 \cdot 59\,649\,\mathrm{km} = 190\,898\,\mathrm{km}$$

za čas

$$t = \frac{s}{c} = \frac{190\,898\,\mathrm{km}}{300\,000\,\mathrm{km/s}} = 0{,}636\,33\,\mathrm{s} \doteq 0{,}64\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

FO66EF1-7 Nádobka s kapalinami

J. Thomas

a) Označme objem prázdné nádobky V a její hmotnost m. Je-li v nádobce voda, platí

$$m_1 = m + m_\mathrm{v} = m + V\varrho,$$

je-li v nádobce olej

$$m_2 = m + m_\mathrm{o} = m + V\varrho_\mathrm{o}.$$

Odečtením rovnic nebo úvahou, že rozdíl hmotností závisí na objemu V a rozdílu hustot kapalin, dostáváme

$$m_1 - m_2 = V\varrho - V\varrho_\mathrm{o} = V\left(\varrho - \varrho_\mathrm{o}\right).$$

Odtud vychází objem nádobky

$$V = \frac{m_1 - m_2}{\varrho - \varrho_\mathrm{o}} = \frac{400\,\mathrm{g} - 361\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}85\,\mathrm{g/cm^3}} = 260\,\mathrm{cm^3} = 260\,\mathrm{ml}.$$ **3 body**

Dosazením do některé z výše uvedených rovnic pro m_1 nebo m_2 získáme hmotnost samotné nádobky, např.

$$m = m_1 - V\varrho = 400\,\mathrm{g} - 260\,\mathrm{cm^3} \cdot 1{,}0\,\mathrm{g/cm^3} = 140\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

Hmotnost nádobky je tedy $m = 140\,\mathrm{g}$ a její objem je $V = 260\,\mathrm{ml}$.

b) Naplníme-li nádobku lihem, bude celková hmotnost

$$m_3 = m + V\varrho_\mathrm{l} = 140\,\mathrm{g} + 260\,\mathrm{cm^3} \cdot 0{,}78\,\mathrm{g/cm^3} = 342{,}8\,\mathrm{g} \doteq 340\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

c) Hmotnost glycerínu může být nejvýše $m_\mathrm{g} = m_4 - m = 400\,\mathrm{g} - 140\,\mathrm{g} = 260\,\mathrm{g}$, můžeme tedy přilít

$$V_\mathrm{g} = \frac{m_\mathrm{g}}{\varrho_\mathrm{g}} = \frac{260\,\mathrm{g}}{1{,}25\,\mathrm{g/cm^3}} = 208\,\mathrm{cm^3} \doteq 200\,\mathrm{ml}$$

glycerínu. V tomto případě má podle zadání otázky smysl výsledek zaokrouhlit dolů. **3 body**

FO66EF1-8 Kousek ledu s hřebíkem *J. Thomas*

a) Teplo na roztátí části ledu o hmotnosti Δm dodá voda o hmotnosti $m_\mathrm{v} = V\varrho = 200\,\mathrm{cm^3} \cdot 1{,}0\,\mathrm{g/cm^3} = 200\,\mathrm{g} = 0{,}20\,\mathrm{kg}$ v nádobce a platí

$$m_\mathrm{v} c \Delta t = \Delta m l_\mathrm{t},$$

odkud vyjádříme

$$\Delta m = \frac{m_\mathrm{v} c \Delta t}{l_\mathrm{t}} = \frac{0{,}20\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 8\,{}^\circ\mathrm{C}}{330\,000\,\mathrm{J/kg}} \doteq 0{,}020\,364\,\mathrm{kg} \doteq 20\,\mathrm{g},$$

Ze $120\,\mathrm{g}$ ledu odtálo asi $20\,\mathrm{g}$, zbývá tedy kousek ledu o hmotnosti $m = 120\,\mathrm{g} - 20{,}364\,\mathrm{g} = 99{,}636\,\mathrm{g} \doteq 100\,\mathrm{g}$. **3 body**

b) Objem ledu o hmotnosti m je

$$V = \frac{m}{\varrho_\mathrm{l}} = \frac{99{,}636\,\mathrm{g}}{0{,}90\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 110{,}71\,\mathrm{cm^3}.$$ **1 bod**

Objem hřebíku V_h o hustotě $\varrho_\mathrm{h} = 7{,}85\,\mathrm{g/cm^3}$ a hmotnosti $3{,}0\,\mathrm{g}$ vychází

$$V_\mathrm{h} = \frac{m_\mathrm{h}}{\varrho_\mathrm{h}} = \frac{3{,}0\,\mathrm{g}}{7{,}85\,\mathrm{g/cm^3}} = 0{,}382\,2\,\mathrm{cm^3} \doteq 0{,}38\,\mathrm{ml}.$$ **1 bod**

Vidíme, že oproti objemu ledu je objem hřebíku prakticky zanedbatelný.

c) Led s hřebíkem se začne potápět při hmotnosti m_1 a objemu V_1, když se podle Archimédova zákona bude vztlaková síla rovnat síle tíhové a zároveň se celý kus ledu i s hřebíkem dostane pod hladinu. Pak platí

$$(m_1 + m_\mathrm{h})\, g = (V_1 + V_\mathrm{h})\, \varrho g.$$

Postupně vyjádříme

$$V_1 \varrho_\mathrm{l} + V_\mathrm{h} \varrho_\mathrm{h} = V_1 \varrho + V_\mathrm{h} \varrho.$$

Po vyjádření objemu V_1 dostáváme

$$V_1 = V_\mathrm{h} \frac{\varrho_\mathrm{h} - \varrho}{\varrho - \varrho_\mathrm{l}} = 0{,}382\,2\,\mathrm{cm^3} \cdot \frac{7{,}85\,\mathrm{g/cm^3} - 1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}}{1{,}0\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}90\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 26{,}178\,\mathrm{cm^3}.$$

Musí tedy odtát objem $\Delta V = V - V_1 = 110{,}71\,\mathrm{cm^3} - 26{,}178\,\mathrm{cm^3} = 84{,}532\,\mathrm{cm^3}$ ledu o hmotnosti

$$\Delta m_1 = \Delta V \varrho_\mathrm{l} = 84{,}532\,\mathrm{cm^3} \cdot 0{,}90\,\mathrm{g/cm^3} \doteq 76{,}078\,\mathrm{g}.$$

Protože za minutu odtaje $m' = 5{,}0\,\mathrm{g}$ ledu, led s hřebíkem se začne potápět za dobu

$$t = \frac{\Delta m_1}{m'}\,\mathrm{min} = \frac{76{,}078\,\mathrm{g}}{5{,}0\,\mathrm{g}}\,\mathrm{min} \doteq 15{,}216\,\mathrm{min} \doteq 15\,\mathrm{min}.$$ **5 bodů**

Poznámka: Řádově stejný výsledek dostaneme, pokud zanedbáme objem hřebíku, podmínka rovnováhy podle Archimédova zákona pak má tvar

$$(m_1 + m_\mathrm{h})\, g = V_1 \varrho g.$$

Postupně pak vychází

$$V_1 \varrho_\mathrm{l} + m_\mathrm{h} = V_1 \varrho, \qquad \Longrightarrow \qquad V_1 = \frac{m_\mathrm{h}}{\varrho - \varrho_\mathrm{l}} = \frac{3\,\mathrm{g}}{1{,}0\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}90\,\mathrm{g/cm^3}} = 30\,\mathrm{cm^3},$$

$$\Delta V = V - V_1 = 110{,}71\,\mathrm{cm^3} - 30\,\mathrm{cm^3} = 80{,}71\,\mathrm{cm^3}$$

$$\Delta m_1 = \Delta V \varrho_\mathrm{l} = 80{,}71\,\mathrm{cm^3} \cdot 0{,}90\,\mathrm{g/cm^3} \doteq 72{,}639\,\mathrm{g}$$

$$t = \frac{\Delta m_1}{m'}\,\mathrm{min} = \frac{72{,}639\,\mathrm{g}}{5{,}0\,\mathrm{g}}\,\mathrm{min} \doteq 14{,}528\,\mathrm{min} \doteq 15\,\mathrm{min}.$$

V rámci požadované přesnosti lze i toto řešení uznat za správné.

FO66EF1-9 Ohřívání kapalin v kalorimetru *J. Jírů*

a) Podle grafu A se voda o hmotnosti $m_1 = 450\,\mathrm{g} = 0{,}45\,\mathrm{kg}$ za dobu $\tau_1 = 5\,\mathrm{min} = 300\,\mathrm{s}$ ohřála o teplotní rozdíl $\Delta t_1 = 70\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C} = 50\,°\mathrm{C}$. Podle grafu B se voda o neznámé hmotnosti m_2 za stejnou dobu τ_1 ohřála o teplotní rozdíl $\Delta t_2 = 50\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C} = 30\,°\mathrm{C}$.

Označme P stálý příkon, s nímž se každá kapalina v kalorimetru ohřívá. Pro teplo přijaté vodou v případě A platí

$$Q_1 = m_1 c \Delta t_1 = P\tau_1,$$

odkud vyjádříme příkon kalorimetru

$$P = \frac{m_1 c \Delta t_1}{\tau_1} = \frac{0{,}45\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot°C)} \cdot 50\,°\mathrm{C}}{300\,\mathrm{s}} = 315\,\mathrm{W}.$$ **3 body**

Podobně pro teplo přijaté při ohřívání vody o hmotnosti m_2 v případě B platí

$$Q_2 = m_2 c \Delta t_2 = P\tau_1$$

a pro hledanou hmotnost m_2 dostáváme

$$m_2 = \frac{P\tau_1}{c\Delta t_2} = \frac{m_1 c \Delta t_1}{c \Delta t_2} = m_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 0{,}45\,\mathrm{kg} \cdot \frac{50\,°\mathrm{C}}{30\,°\mathrm{C}} = 0{,}75\,\mathrm{kg} = 750\,\mathrm{g}.$$ **3 body**

b) Podle grafu C se neznámá kapalina o hmotnosti $m_3 = 630\,\mathrm{g} = 0{,}63\,\mathrm{kg}$ za dobu $\tau_3 = 4\,\mathrm{min} = 240\,\mathrm{s}$ ohřála o teplotní rozdíl $\Delta t_1 = 70\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C} = 50\,°\mathrm{C}$. Pro teplo Q_3 přijaté kapalinou platí

$$Q_3 = m_3 c_\mathrm{x} \Delta t_1 = P\tau_3.$$

Z rovnice vypočteme měrnou tepelnou kapacitu c_x neznámé kapaliny

$$c_\mathrm{x} = \frac{P\tau_3}{m_3 \Delta t_1} = \frac{315\,\mathrm{W} \cdot 240\,\mathrm{s}}{0{,}63\,\mathrm{kg} \cdot 50\,°\mathrm{C}} = 2\,400\,\mathrm{J/(kg\cdot°C)}.$$

V tabulkách nebo na internetu (např. `http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/tepelna-kapacita-roztaznost.php`) dohledáme, že neznámou kapalinou může být glycerol (glycerín) nebo etylalkohol. **4 body**

Poznámka: I když většina řešitelů příkon číselně spočítá, stanovení příkonu P není nutné a vyžadováno. Část b) je možné řešit dosazením za P ze zadaných hodnot

$$c_\mathrm{x} = \frac{P\tau_3}{m_3\Delta t_1} = \frac{m_1 c\Delta t_1\tau_3}{m_3\Delta t_1\tau_1} = c\,\frac{m_1}{m_3}\frac{\tau_3}{\tau_1} =$$
$$= 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot\frac{0{,}45\,\mathrm{kg}}{0{,}63\,\mathrm{kg}}\cdot\frac{240\,\mathrm{s}}{300\,\mathrm{s}} = 2\,400\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}.$$

FO66EF1-10 Elektrický obvod se spínačem *J. Thomas*

a) Je-li vypínač K vypnut, je celkový odpor roven součtu odporů mezi body AB, BC a CD. Mezi body A a B je odpor

$$R_{AB} = \frac{R_1R_1}{R_1+R_1} = \frac{R_1^2}{2R_1} = \frac{R_1}{2} = \frac{120\,\Omega}{2} = 60\,\Omega.$$

Výsledný odpor mezi body A a D je pak

$$R_{AD} = 60\,\Omega + 120\,\Omega + 120\,\Omega = 300\,\Omega.$$ **2 body**

Pro proud procházející zdrojem pak dostáváme

$$I_1 = \frac{U}{R_{AD}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{300\,\Omega} = 0{,}04\,\mathrm{A} = 40\,\mathrm{mA}.$$ **1 bod**

b) Uvolněné teplo vypočítáme podle vztahu

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_{AD}}t = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{300\,\Omega}\cdot 60\,\mathrm{s} = 28{,}8\,\mathrm{J} \doteq 29\,\mathrm{J}.$$ **2 body**

c) Po zapnutí spínače K bude odpor mezi body A a C

$$R_{AC} = \frac{(R_{AB}+R_1)\,R_2}{R_{AB}+R_1+R_2} = \frac{(60\,\Omega+120\,\Omega)\cdot 360\,\Omega}{60\,\Omega+120\,\Omega+360\,\Omega} = 120\,\Omega,$$

Výsledný odpor mezi body A a D je pak

$$R_{AD} = 120\,\Omega + 120\,\Omega = 240\,\Omega;$$

vidíme, že po sepnutí spínače se celkový odpor obvodu zmenšil. **3 body**

Pro proud procházející zdrojem pak dostáváme

$$I_2 = \frac{U}{R_{AD}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{240\,\Omega} = 0{,}05\,\mathrm{A} = 50\,\mathrm{mA};$$

po sepnutí spínače se proud procházející zdrojem zvětšil. **1 bod**

Pro uvolněné teplo pak dostáváme

$$Q_2 = \frac{U^2}{R_{AD}}t = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{240\,\Omega}\cdot 60\,\mathrm{s} = 36\,\mathrm{J}.$$ **1 bod**

Poznámka: Teplo lze vypočítat i pomocí proudů I_1 a I_2, dospějeme ke stejným výsledkům:

$$Q_1 = UI_1t = 12\,\mathrm{V}\cdot 0{,}04\,\mathrm{A}\cdot 60\,\mathrm{s} = 28{,}8\,\mathrm{J} \doteq 29\,\mathrm{J},$$
$$Q_2 = UI_2t = 12\,\mathrm{V}\cdot 0{,}05\,\mathrm{A}\cdot 60\,\mathrm{s} = 36\,\mathrm{J}.$$