

Řešení úloh 2. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Úlohy navrhl J. Jírů

- 1.a) Sekundová ručička má dobu oběhu $T_s = 60$ s, hodinová $T_h = 12$ h = 43 200 s. Jejich úhlové rychlosti jsou

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 0,105 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 1,05 \cdot 10^{-1} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$
$$\omega_h = \frac{2\pi}{T_h} = 0,000 145 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

- b) Koncový bod sekundové ručičky urazí za čas $t = 7 \cdot 24$ h = 7 · 86 400 s dráhu

$$s = vt = \frac{2\pi r}{T_s} t = \frac{2\pi \cdot 0,014}{60} \cdot 7 \cdot 86 400 \text{ m} = 890 \text{ m}.$$

2 body

- c) Minutová ručička přesných hodinek s periodou $T_m = 1$ h = 3 600 s naměří po 24 obězích požadovaný čas $t = 24$ h = 86 400 s přesně.

Perioda minutové ručičky nepřesných hodinek je

$$T'_m = \frac{2\pi}{\omega'_m}.$$

Minutová ručička nepřesných hodinek vykoná 24 oběhů za čas

$$t' = 24T'_m = 24 \cdot \frac{2\pi}{\omega'_m} = \frac{48\pi}{0,001 744} \text{ s} = 86 466 \text{ s} > 86 400 \text{ s}.$$

Nepřesné hodinky se tak zpožďují, a to o dobu $\Delta t = t' - t = 66$ s za 24 hodin.

4 body

- 2.a) Míč o hmotnosti m při pohybu dolů dosáhne bezprostředně před dopadem rychlosti v_1 , během pohybu platí zákon zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{v_1^2 - 2gh_1}.$$

Míč se odrazí rychlostí $v_2 = kv_1$, během výstupu opět platí zákon zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_1 \Rightarrow v_2^2 = 2gh_1 \Rightarrow v_1^2 = \frac{v_2^2}{k^2} = \frac{2gh_1}{k^2}.$$

Hledaná velikost počáteční rychlosti pak je

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 - 2gh_1} = \sqrt{\frac{2gh_1}{k^2} - 2gh_1} = \sqrt{\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \cdot 2gh_1} =$$
$$= \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2} \cdot 2gh_1} = 5,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5 bodů

b) Obdobně při pohybu dolů platí

$$\frac{1}{2}mv_0'^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1'^2 \Rightarrow v_1' = \sqrt{v_0'^2 + 2gh_1}.$$

Míč se odrazí rychlostí $v_2' = kv_1'$, během výstupu platí

$$\frac{1}{2}mv_2'^2 = mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{k^2v_1'^2}{2g}.$$

Po dosazení dostaneme

$$h_2 = \frac{k^2v_1'^2}{2g} = \frac{k^2(v_0'^2 + 2gh_1)}{2g} = k^2\left(\frac{v_0'^2}{2g} + h_1\right) = 1,2 \text{ m}.$$

5 bodů

3.a) Na soupravu obou vozů působí tažná síla drezíny a v opačném směru síla valivého odporu. Podle zákona síly jejich výslednice soupravu obou vozů urychluje se zrychlením o velikosti

$$a_1 = \frac{F_1 - K(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{F_1}{m_1 + m_2} - Kg = 0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Tažná síla působící na druhý vůz kompenzuje sílu valivého odporu a vůz urychluje. Její velikost je

$$F_2 = m_2a_1 + Km_2g = m_2\left(\frac{F_1}{m_1 + m_2} - Kg\right) + Km_2g = \frac{m_2}{m_1 + m_2}F_1 = 3600 \text{ N}.$$

4 body

b) Při rovnoměrném pohybu tažné síly kompenzují sílu valivého odporu. Jejich velikosti jsou

$$F_1' = K(m_1 + m_2)g = 2900 \text{ N},$$

$$F_2' = Km_2g = 1200 \text{ N}.$$

2 body

c) Označme m celkovou hmotnost všech tří vozidel. Na celou soustavu působí síla valivého odporu celé soustavy a způsobuje její rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením o velikosti

$$a_2 = \frac{Kgm}{m} = Kg.$$

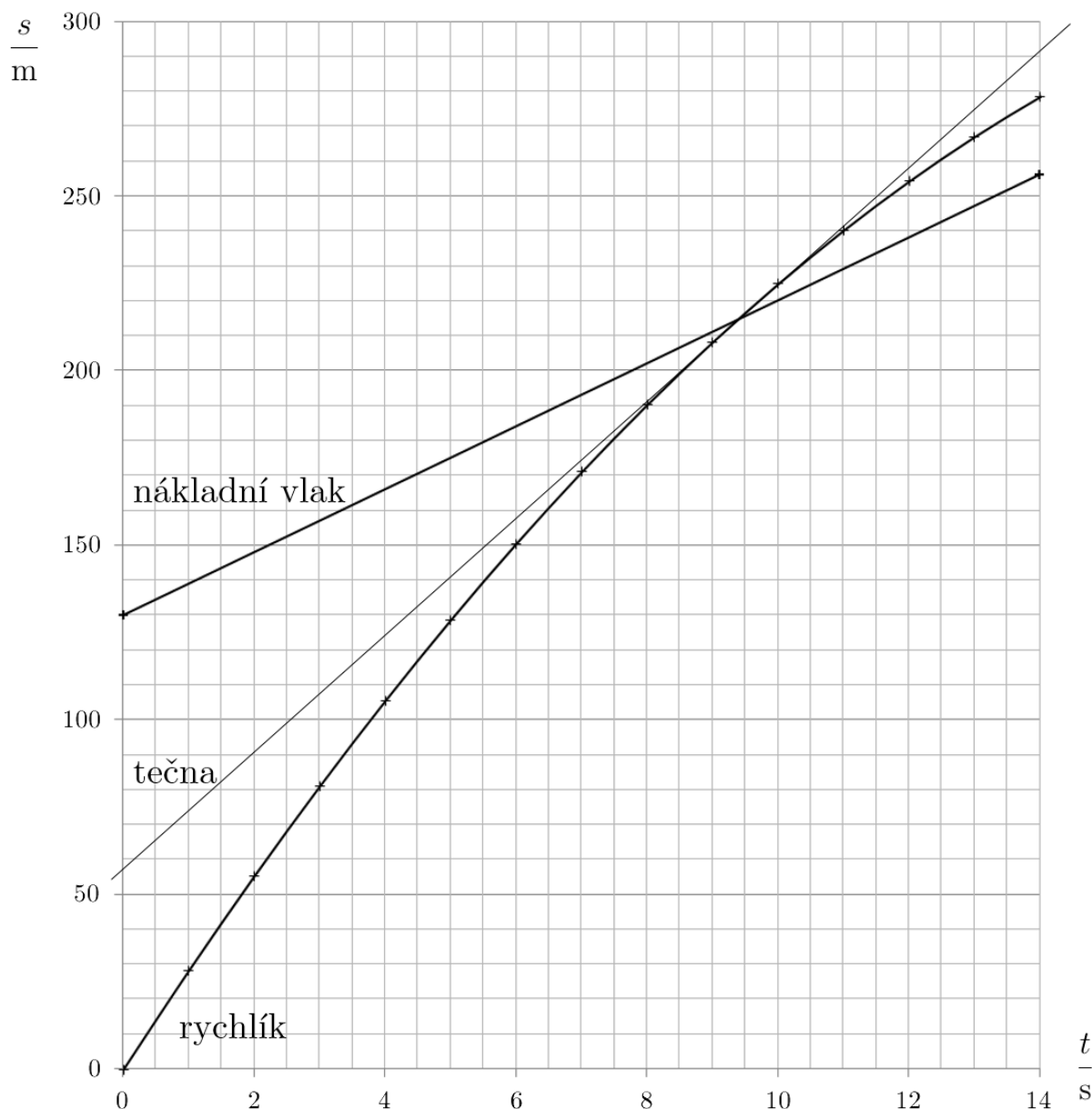
Pro dráhu a čas rovnoměrně zpomaleného pohybu platí

$$s = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{1}{2}a_2\left(\frac{v}{a_2}\right)^2 = \frac{v^2}{2a_2} = \frac{v^2}{2Kg} = 530 \text{ m},$$

$$t = \frac{v}{a_2} = \frac{v}{Kg} = 85 \text{ s}.$$

4 body

4.a) Grafem dráhy rychlíku je křivka, kterou sestojíme pomocí tabulky. Grafem dráhy nákladního vlaku je přímka, sestojíme ji pomocí dvou vybraných bodů. Užijeme např. uspořádané dvojice $[0 \text{ s}; 130 \text{ m}]$ a $[14 \text{ s}; 256 \text{ m}]$ (v čase 14 s má nákladní vlak ujetou dráhu $s_2 = s_0 + v_2t = (130 + 9 \cdot 14) \text{ m} = 256 \text{ m}$).



Obr. R1

5 bodů

- b) Čas a místo dojetí určuje průsečík křivky a přímky. Z grafu vyčteme čas dojetí 9,3 s a rychlíkem ujetou dráhu 215 m. **2 body**
- c) V průsečíku grafů sestojíme tečnu ke křivce. Okamžitou rychlost rychlíku v čase dojetí určuje sklon tečny. S využitím dvou nejvzdálenějších bodů tečny dostaneme

$$v_{\text{graf}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(292 - 57) \text{ m}}{14 \text{ s}} = 16,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Při pečlivém rýsování včetně vizuálního nastavení tečny bychom měli získat výsledek s přesností na 2 platné číslice, tj. $17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **3 body**

Poznámka: Pohyb rychlíku je rovnoměrně zpomalený, jeho funkční závislost je dána vztahem

$$s_1(t) = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = (29 \{t\} - 0,65 \{t\}^2) \text{ m},$$

což vede na analytické řešení úkolu c) $16,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ po zaokrouhlení na 3 platné číslice.