

Řešení úloh 1. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Úlohy navrhl J. Jírů

1. Celková dráha závodu je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{6}s_3 + 3s_3 + s_3 = \frac{25}{6}s_3 = \frac{25}{6} \cdot 4\,800 \text{ m} = 20\,000 \text{ m}.$$

Průměrná rychlost

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{20\,000}{3\,975} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Úsek pro plavání má délku

$$s_1 = \frac{1}{6}s_3 = \frac{1}{6} \cdot 4\,800 \text{ m} = 800 \text{ m}.$$

Průměrná rychlost plavání je

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{800}{755} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 bod

Užitím vztahů $s_2 = 3s_3$, $v_2 = 2v_3$ dostaneme

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{3s_3}{2v_3} = \frac{3}{2}t_3.$$

Současně platí

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + \frac{3}{2}t_3 + t_3 = t_1 + \frac{5}{2}t_3.$$

Ze vztahů plyne

$$t_3 = \frac{2}{5}(t - t_1) = \frac{2}{5}(3\,975 - 755) \text{ s} = 1\,288 \text{ s} = 21 : 28 \text{ min}$$

$$t_2 = \frac{3}{2}t_3 = \frac{3}{2} \cdot 1\,288 \text{ s} = 1\,932 \text{ s} = 32 : 12 \text{ min}.$$

5 bodů

Průměrné rychlosti jsou

$$v_3 = \frac{s_3}{t_3} = \frac{4\,800}{1\,288} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,73 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{3 \cdot 4\,800}{1\,932} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (nebo přímo } v_2 = 2v_3).$$

2 body

2.a) Vlak brzdí se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{v_0}{t_1} = \frac{29}{47} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,617 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Celková brzdňá dráha vlaku je

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,617 \cdot 47^2 \text{ m} = 680 \text{ m}.$$

V čase $t_2 = t_1/3$ má ujetou dráhu

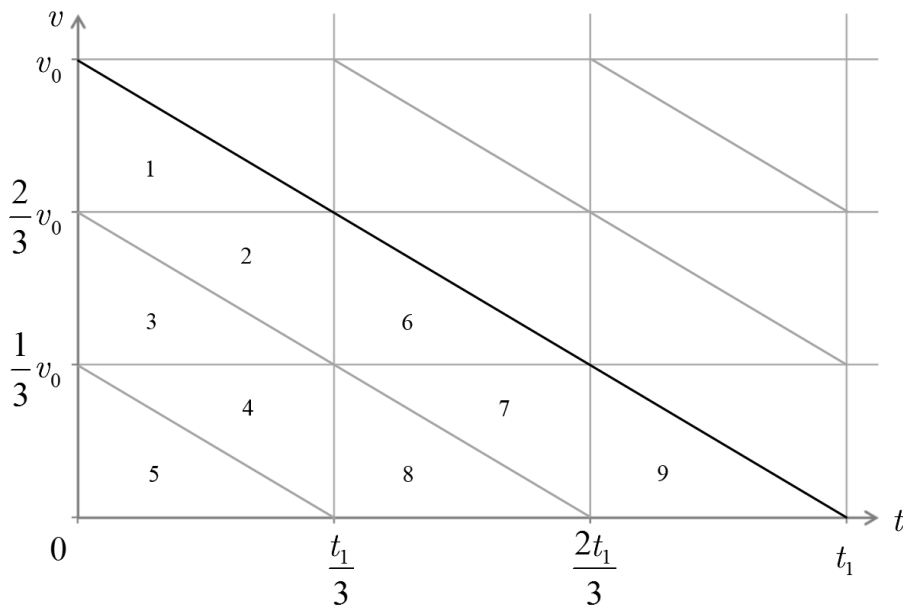
$$s_2 = v_0t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 = 29 \cdot \frac{47}{3} - \frac{1}{2} \cdot 0,617 \cdot \left(\frac{47}{3}\right)^2 \text{ m} = 380 \text{ m}.$$

Poměr drah je

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{380}{680} = \frac{19}{34} = 0,559 = 0,56.$$

4 body

b)



Obr. R1

Obsah každého trojúhelníku je stejný. Dráze s_1 odpovídá obsah plochy pod grafem tvořený trojúhelníky 1 až 9, dráze s_2 obsah plochy pod grafem trojúhelníků 1 až 5. Hledaný poměr drah je určen podílem jejich počtu $\frac{s_2}{s_1} = \frac{5}{9}$.

3 body

c) Pro jednotlivé dráhy platí

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{t_1} \cdot t_1^2 = \frac{v_0t_1}{2},$$

$$s_2 = v_0t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 = v_0\frac{t_1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{t_1} \cdot \left(\frac{t_1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}v_0t_1.$$

Poměr brzdňých drah je

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\frac{5}{18}v_0t_1}{\frac{1}{2}v_0t_1} = \frac{5}{9} = 0,5\bar{5} = 0,56.$$

Výsledek je shodný s výsledkem a) s přesností na dvě platné číslice, míra nepřesnosti závisí na způsobu zaokrouhlování v řešení a). Naopak naprostá shoda výsledku c) nastává s výsledkem přesného geometrického řešení b). **3 body**

- 3.a) V neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem a pohybující se ve směru tahové síly se zrychlením $\mathbf{a}$ působí ve vodorovném směru na kvádr setrvačná síla $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}$. Pokud velikost setrvačné síly nepřekročí maximální možnou velikost třecí síly $F_t = fmg$, zůstává kvádr na plošině vozíku v klidu. V případě rovnosti $F_s = F_t$ pak pro velikost hledaného zrychlení platí:

$$a_1 = \frac{F_s}{m} = \frac{F_t}{m} = \frac{fmg}{m} = fg = 0,25 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

1 bod

- b) V neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem působí ve vodorovném směru na kvádr dvě síly, proti směru pohybu vozíku setrvačná síla o velikosti $F_s = ma_2$ a ve směru pohybu vozíku třecí síla o velikosti $F_t = fmg$. Kvádr se pohybuje vzhledem k vozíku se zrychlením o velikosti

$$a'_2 = \frac{F_s - F_t}{m} = \frac{ma_2 - fmg}{m} = a_2 - fg = (4 - 0,25 \cdot 9,81) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

- c) Kvádr urazí na plošině rovnoměrně zrychleným pohybem dráhu $l - d$ za čas t_1 splňující vztah

$$l - d = \frac{1}{2} a'_2 t_1^2.$$

Za stejný čas t_1 ujede vozík dráhu

$$s = \frac{1}{2} a_2 t_1^2.$$

Vytvoříme podíl druhé a první rovnice:

$$\frac{s}{l - d} = \frac{a_2}{a'_2}.$$

Z podílu vyjádříme dráhu vozíku a dále upravíme:

$$s = \frac{a_2}{a'_2} (l - d) = \frac{a_2}{a_2 - fg} (l - d) = \frac{4}{4 - 0,25 \cdot 9,81} (0,6 - 0,12) \text{ m} = 1,2 \text{ m}.$$

3 body

- d) V případě a) je celá soustava vozíku a kvádrů je urychlována se zrychlením o velikosti a_1 tahovou silou o velikosti

$$F_1 = (M + m)a_1 = (M + m)fg = (5 + 2) \cdot 0,25 \cdot 9,81 \text{ N} = 17 \text{ N}.$$

V případě b) je vozík urychlován se zrychlením o velikosti a_2 , kvádr je urychlován pouze třecí silou o velikosti F_t (jeho velikost zrychlení je a_1). Velikost výsledné tahové síly pak je

$$F_2 = Ma_2 + F_t = Ma_2 + fmg = 5 \cdot 4 + 0,25 \cdot 2 \cdot 9,81 \text{ N} = 25 \text{ N}.$$

4 body

4.a) Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg \cdot 2l$$

plyne

$$v_0 = \sqrt{4gl} = 2,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Označme v_2 velikost rychlosti kuličky v horní poloze, při níž tyč nebude namáhána. Tehdy je setrvačná odstředivá síla F_{o2} v rovnováze s tíhovou silou $m\mathbf{g}$:

$$\frac{mv_2^2}{l} = mg.$$

Z rovnice plyne

$$v_2 = \sqrt{gl}.$$

Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg \cdot 2l + \frac{1}{2}mv_2^2$$

po úpravě a dosazení dostaneme

$$v_1 = \sqrt{4gl + v_2^2} = \sqrt{4gl + gl} = \sqrt{5gl} = 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

c) Na kuličku v nejnižší poloze působí tíhová síla $m\mathbf{g}$ a setrvačná odstředivá síla F_{o1} , obě ve směru svisle dolů. Jejich výslednice má velikost

$$F_1 = mg + F_{o1} = mg + \frac{mv_1^2}{l} = mg + \frac{m \cdot 5gl}{l} = 6mg = 8,8 \text{ N}.$$

2 body

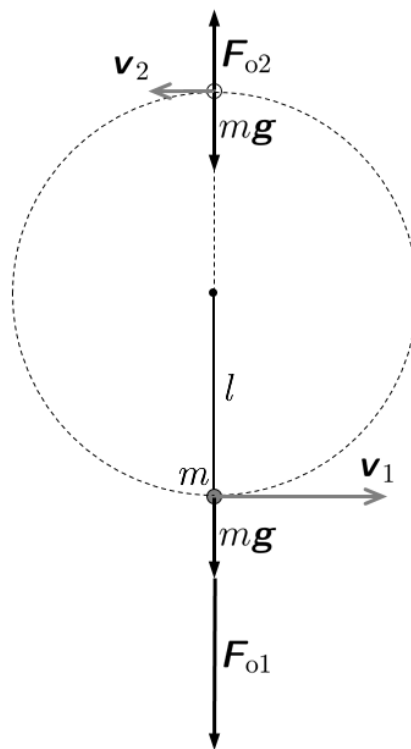
d) Tečné zrychlení má největší velikost ve dvou vodorovných polohách tyčky, kdy okamžitá rychlost kuličky směřuje svisle vzhůru, nebo po přetočení svisle dolů. Maximální velikost tečného zrychlení je

$$a_{t,\max} = g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Maximální velikost dostředivého zrychlení je v nejnižším bodě trajektorie, kde má kulička největší velikost rychlosti:

$$a_{d,\max} = \frac{v_1^2}{l} = \frac{5gl}{l} = 5g = 49,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body



Obr. R2

- 5.a) Tahovou sílu, kterou působí Jenda na saně, rozložíme na vodorovnou složku $F_{1x} = F_1 \cos \alpha$ a na svislou složku $F_{1y} = F_1 \sin \alpha$.
Třecí síla působící proti pohybu ve vodorovném směru je

$$F_{1t} = f (mg - F_{1y}) = f (mg - F_1 \sin \alpha).$$

Při rovnoměrném pohybu nastává rovnost $F_{1x} = F_{1t}$. Dosazením dostaneme

$$F_1 \cos \alpha = f (mg - F_1 \sin \alpha).$$

Z rovnice plyne

$$F_1 = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{0,1 \cdot 28 \cdot 9,81}{\cos 33^\circ + 0,1 \cdot \sin 33^\circ} \text{ N} = 31 \text{ N}.$$

V případě tlačné síly, kterou působí Karel na saně, je rozdíl pouze ve směru svislé složky F_{2y} . Platí vztahy:

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha,$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha,$$

$$F_{2t} = f (mg + F_{2y}),$$

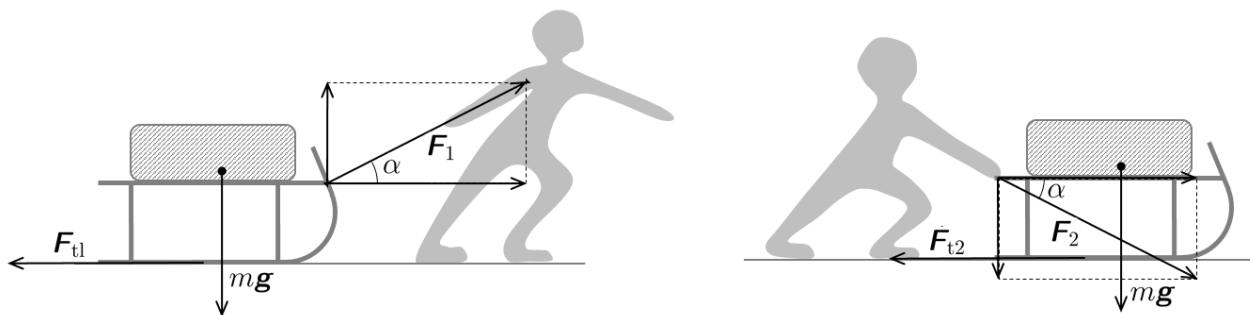
$$F_{2x} = F_{2t},$$

z nichž postupným dosazením dostaneme

$$F_2 \cos \alpha = f (mg + F_2 \sin \alpha).$$

Z rovnice plyne

$$F_2 = \frac{fmg}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = \frac{0,1 \cdot 28 \cdot 9,81}{\cos 33^\circ - 0,1 \cdot \sin 33^\circ} \text{ N} = 35 \text{ N}. \quad \mathbf{6 \text{ bodů}}$$



Obr. R3

- b) Z rovnosti

$$W = F_1 s_1 \cos \alpha = F_2 s_2 \cos \alpha$$

plyne

$$\begin{aligned} s_2 = \frac{F_1}{F_2} s_1 &= \frac{\frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}}{\frac{fmg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}} s_1 = \frac{\cos \alpha - f \sin \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} s_1 = \\ &= \frac{\cos 33^\circ - 0,1 \cdot \sin 33^\circ}{\cos 33^\circ + 0,1 \cdot \sin 33^\circ} \cdot 90 \text{ m} = 79 \text{ m}. \end{aligned}$$

4 body

6. 1) Počet oběhů $n = 5$, poloměr kružnice $r = 7$ cm

$\frac{t_i}{s}$	$\frac{T_i = t_i/n}{s}$	$\frac{\Delta T_i = \bar{T} - T_i }{s}$
6,59	1,318	0,010
6,65	1,330	0,002
6,63	1,326	0,002
6,69	1,338	0,010
6,66	1,332	0,004
6,67	1,334	0,006
6,66	1,332	0,004
6,62	1,324	0,004
6,58	1,316	0,012
6,65	1,330	0,002
	$\bar{T} = 1,328$ s	$\Delta T = 0,006$ s $\delta T = 0,5$ %

Počet oběhů $n = 5$, poloměr kružnice $r = 14$ cm

$\frac{t_i}{s}$	$\frac{T_i = t_i/n}{s}$	$\frac{\Delta T_i = \bar{T} - T_i }{s}$
6,55	1,310	0,000
6,61	1,322	0,012
6,57	1,314	0,004
6,57	1,314	0,004
6,56	1,312	0,002
6,57	1,314	0,004
6,53	1,306	0,004
6,48	1,296	0,014
6,55	1,310	0,000
6,50	1,300	0,010
	$\bar{T} = 1,310$ s	$\Delta T = 0,005$ s $\delta T = 0,4$ %

Změřené periody jsou

$$T_1 = (1,328 \pm 0,006) \text{ s}, \delta T_1 = 0,5 \text{ },$$

$$T_2 = (1,310 \pm 0,005) \text{ s}, \delta T_2 = 0,4 \text{ }.$$

Periody jsou blízké, ale intervaly získané z průměrných odchylek se nepřekrývají:

$$T_{1,\min} = 1,322 \text{ s} > T_{2,\max} = 1,315 \text{ s}.$$

což svědčí o jisté závislosti periody na poloměru kružnice.

Rozptyl naměřených časů je způsoben nepřesností tvaru skutečné trajektorie vzhledem k požadované kružnici s daným poloměrem a náhodnou chybou při měření času.

6 bodů

2) Úhlové rychlosti a obvodové rychlosti kuličky jsou:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 4,73 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_1 = r_1 \omega_1 = 0,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 4,80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 = r_2 \omega_2 = 0,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \textbf{2 body}$$

3) Orientačně pro velmi malou kružnici ($r \approx 1$ cm) byla změřena doba pěti period 6,7 s ($T = 1,34$ s, $\omega = 4,7$ rad $\cdot$ s $^{-1}$). Perioda je mírně větší než u měřených kružnic. Naopak pro kružnici s velkou odchylkou závěsu (odhadem větší než 45°) byla změřena nejkratší doba pěti period 4,1 s ($T = 0,82$ s, $\omega = 7,7$ rad $\cdot$ s $^{-1}$). Teoreticky je možné periodu dále zkracovat, avšak má to své limity v technické proveditelnosti.

Tedy při rostoucím poloměru r ($0 < r < l$) opisované kružnice úhlová rychlost roste nejprve velmi pomalu, ale pro poloměr blížící se délce závěsu l může být teoreticky libovolně velká.

Obvodová rychlost pro malé poloměry, kdy úhlová rychlost je téměř konstantní, roste s poloměrem přibližně přímo úměrně ($v = r\omega$). Pro poloměr blížící se délce závěsu může být obvodová rychlost teoreticky libovolně velká.

2 body

- 7.a) Z grafu plyne, že během např. prvního odrazu, tj. v čase 0,5 s, se velikost rychlosti zmenšila z hodnoty $v_{\text{dop}} = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na hodnotu $v_{\text{od}} = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Součinitel restituce je

$$k = \frac{4}{5} = 0,8. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Označme s hodnotami vyčtenými z grafu $t_1 = 0,5 \text{ s}$ čas prvního dopadu, $\Delta t_1 = 0,4 \text{ s}$ dobu prvního výstupu (druhého pádu) a $\Delta t_2 = 0,32 \text{ s}$ dobu druhého výstupu (třetího pádu). Pro výšky platí

$$h_0 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 1,25 \text{ m},$$

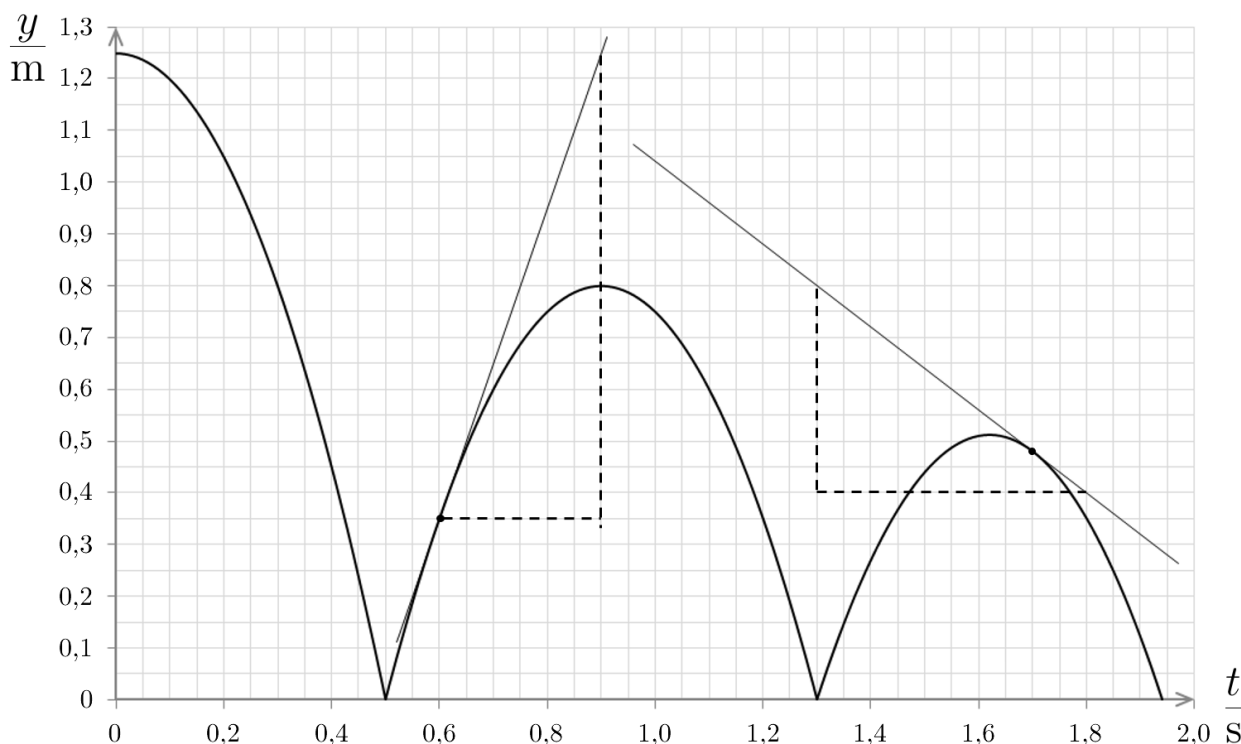
$$h_1 = \frac{1}{2}g\Delta t_1^2 = 0,80 \text{ m},$$

$$h_2 = \frac{1}{2}g\Delta t_2^2 = 0,51 \text{ m}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Tabulka

$\frac{t}{\text{s}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{y}{\text{m}}$	1,25	1,20	1,05	0,80	0,45	0	0,35	0,60	0,75	0,80	0,75

$\frac{t}{\text{s}}$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,62	1,7	1,8	1,9	1,94
$\frac{y}{\text{m}}$	0,60	0,35	0	0,27	0,44	0,51	0,512	0,48	0,35	0,12	0



Obr. R4

4 body

- d) Doplňme tečny. Souřadnice okamžité rychlosti v daném čase je určena směrnici

tečny ke grafu v tomto čase. Volbou vyznačených trojúhelníků dostaneme:

$$v_y(0,6 \text{ s}) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1,25 - 0,35}{0,9 - 0,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(míček se pohybuje nahoru),

$$v_y(1,7 \text{ s}) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0,4 - 0,8}{1,8 - 1,3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -0,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(míček se pohybuje dolů rychlostí o velikosti $v(1,7 \text{ s}) = 0,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

2 body