

Řešení úloh 2. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Úlohy navrhli R. Horáková (1, 2, 3).

1.a) Stav (2): $V_2 = 3V_1, p_2 = p_1, \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 3V_1}{T_2} \rightarrow T_2 = 3T_1.$

0,5 bodu

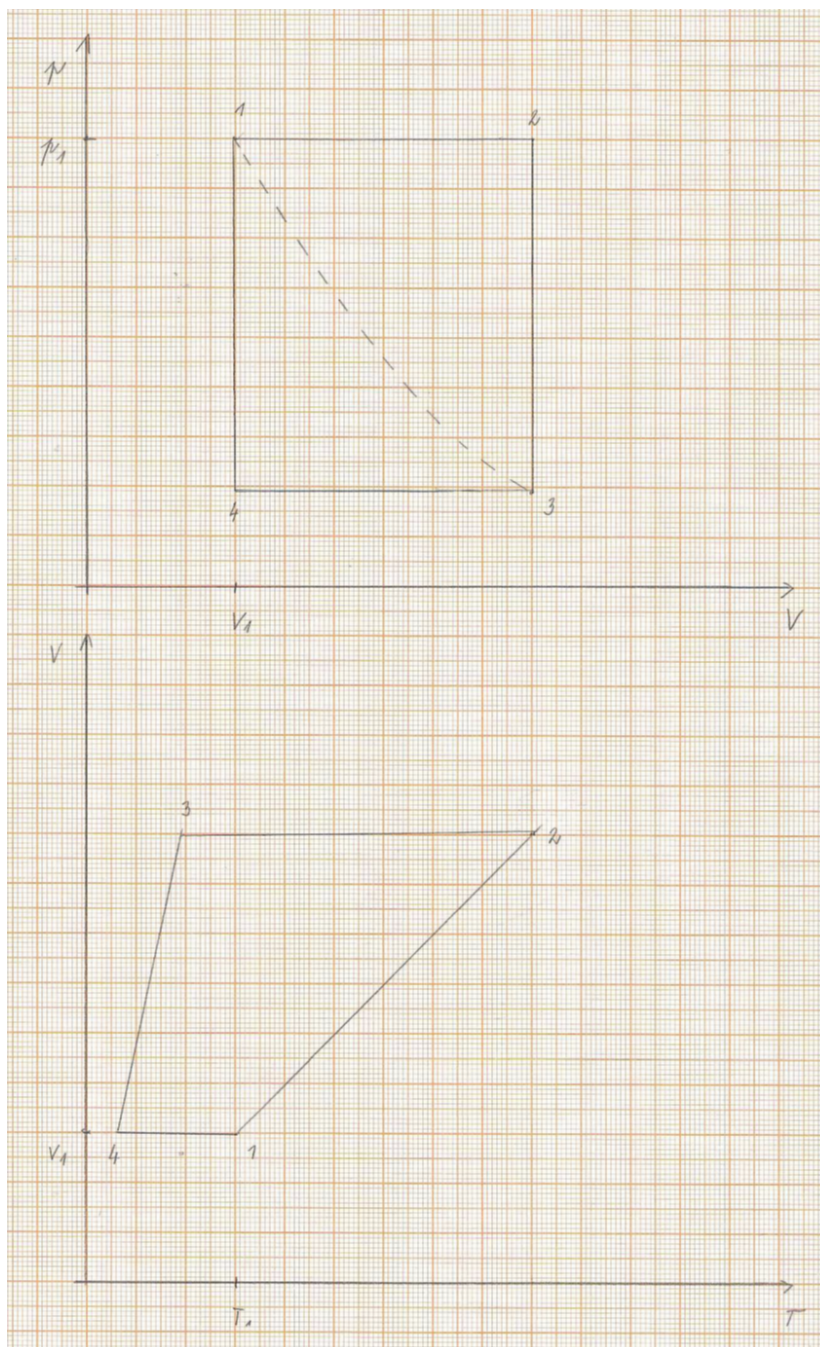
Stav(3): $V_3 = 3V_1, p_1 V_1^\kappa = p_3 V_3^\kappa = p_3 (3V_1)^\kappa \rightarrow p_3 = \frac{p_1}{3^\kappa}, \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3} = \frac{p_1 3V_1}{3^\kappa T_3} \rightarrow T_3 = \frac{3T_1}{3^\kappa} = 3^{(1-\kappa)} T_1.$

1 bod

Stav (4): $V_4 = V_1, p_4 = p_3 = \frac{p_1}{3^\kappa}, \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_4 V_4}{T_4} = \frac{p_1 V_1}{3^\kappa T_4} \rightarrow T_4 = \frac{T_1}{3^\kappa}.$

0,5 bodu

b) Náčrt, viz obrázek 1.



Obr. 1

2 body

- c) Vykonaná práce je číselně rovna obsahu plochy v pV diagramu:

$$W' = (V_2 - V_1)(p_1 - p_3) = (3V_1 - V_1)(p_1 - \frac{p_1}{3^\kappa}) = 2V_1p_1(1 - \frac{1}{3^\kappa}).$$

2 body

- d) Teplo se dodává při ději (1)→(2) – izobarická expanze – a při ději (4)→(1) – izochorické zvýšení tlaku:

$$Q_p = nC_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}nR(3T_1 - T_1) = 7nRT_1,$$

$$Q_V = nC_V(T_1 - T_4) = \frac{5}{2}nR(T_1 - \frac{T_1}{3^\kappa}) = \frac{5}{2}nRT_1(1 - \frac{1}{3^\kappa}).$$

Celkové teplo:

$$Q = Q_p + Q_V = 7nRT_1 + \frac{5}{2}nRT_1(1 - \frac{1}{3^\kappa}) = nRT_1(7 + \frac{5}{2} - \frac{5}{2 \cdot 3^\kappa}) = \frac{1}{2}nRT_1(19 - \frac{5}{3^\kappa}).$$

2 body

- e) Použitím stavové rovnice $p_1V_1 = nRT_1$ lze vykonanou práci z části c) vyjádřit také:

$$W' = 2V_1p_1(1 - \frac{1}{3^\kappa}) = 2nRT_1(1 - \frac{1}{3^\kappa}).$$

Účinnost kruhového děje je rovna podílu vykonané práce a dodaného tepla:

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{2nRT_1(1 - \frac{1}{3^\kappa})}{\frac{1}{2}nRT_1(19 - \frac{5}{3^\kappa})} = \frac{2(1 - \frac{1}{3^\kappa})}{\frac{1}{2}(19 - \frac{5}{3^\kappa})} = \frac{4(3^\kappa - 1)}{19 \cdot 3^\kappa - 5} = 0,175 = 17,5\%.$$

2 body

2. Typ mřížky určíme podle počtu atomů N , které připadají na jednu elementární buňku. Pro hustotu ρ , kterou vyhledáme v tabulkách stejně jako relativní atomové hmotnosti A_r a atomovou hmotnostní konstantu m_u , platí:

$$\rho = \frac{NA_r m_u}{a^3} \rightarrow N = \frac{\rho a^3}{A_r m_u}.$$

1 bod

Nikl: $\rho = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $A_r = 58,69$, $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $a = 0,353 \text{ nm}$, $N = 4,0$. Na jednu elementární buňku připadají 4 atomy, nikl má tedy plošně centrovanou kubickou mřížku.

3 body

Sodík: $\rho = 970 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $A_r = 22,99$, $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $a = 0,428 \text{ nm}$, $N = 1,99 \approx 2,0$. Na jednu elementární buňku připadají 2 atomy, sodík má tedy prostorově centrovanou kubickou mřížku.

3 body

Polonium: $\rho = 9400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $A_r = 208,98$, $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $a = 0,333 \text{ nm}$, $N = 1,0$. Na jednu elementární buňku připadá 1 atom, polonium má tedy prostou kubickou mřížku.

3 body

- 3.a) Označme v výšku kry, V_l objem ledové kry a V objem kry pod vodou. Tíhová síla se rovná síle vztlakové:

$$V_l \rho_l g = V \rho g \rightarrow S v \rho_l g = S h \rho g.$$

Pro objem pod vodou platí:

$$V = \frac{V_l \rho_l g}{\rho g} = \frac{\rho_l}{\rho} V_l = 0,9 V_l.$$

Pod vodou je 0,9 objemu kry.

2 body

- b) Poté, co Honza skočí na kru, ale kru se ještě nerozlomí, opět platí, že tíhová síla se rovná síle vztlakové:

$$mg + S v \rho_l g = S(h + h_1) \rho g.$$

S využitím rovnosti $S v \rho_l g = S h \rho g$ lze psát:

$$mg + S h \rho g = S(h + h_1) \rho g.$$

Odtud lze vyjádřit Honzovu hmotnost jako:

$$m = \frac{S(h + h_1) \rho g - S h \rho g}{g} = S h_1 \rho.$$

Po rozlomení kry platí stejná podmínka – tíhová síla se rovná síle vztlakové:

$$mg + (S - S_1) v \rho_l g = (S - S_1)(h + h_1 + h_2) \rho g.$$

S využitím podmínky $v \rho_l = h \rho$ lze psát:

$$mg + (S - S_1) h \rho g = (S - S_1)(h + h_1 + h_2) \rho g.$$

Odtud lze vyjádřit Honzovu hmotnost jako:

$$m = \frac{(S - S_1)(h + h_1 + h_2) \rho g - (S - S_1) h \rho g}{g} = (S - S_1)(h_1 + h_2) \rho.$$

Před rozlomením kry je Honzova hmotnost $m = S h_1 \rho$. Z tohoto vztahu vyjádříme plochu kry S jako $S = \frac{m}{h_1 \rho}$ a dosadíme do vztahu pro hmotnost vyjádřenou po odlomení kry:

$$m = (S - S_1)(h_1 + h_2) \rho = \left(\frac{m}{h_1 \rho} - S_1 \right) (h_1 + h_2) \rho.$$

Po úpravě dostaneme vztah pro hmotnost m :

$$m = S_1 \frac{h_1}{h_2} \rho (h_1 + h_2) = 60 \text{ kg}.$$

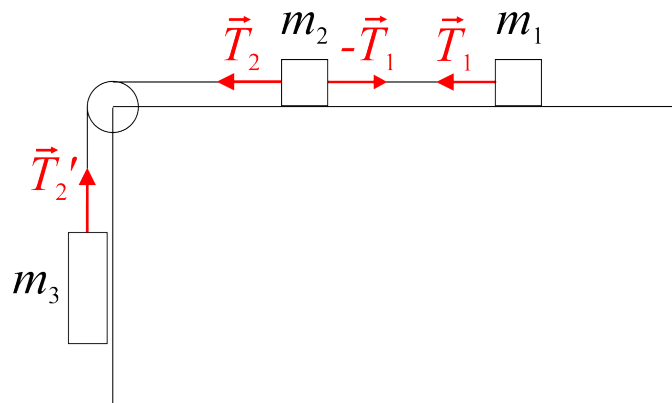
4 body

- c) Pro plochu S původní kry platí:

$$S = \frac{m}{h_1 \rho} = S_1 \frac{h_1 + h_2}{h_2} = 5,0 \text{ m}^2.$$

4 body

- 4.a) Na obrázku 2 jsou nakresleny odpovídající tahové síly, přičemž platí, že $T_2' = T_2$. V souladu s obrázkem 2 napíšeme pohybové rovnice pro všechna tři tělesa:



Obr. 2

$$\begin{aligned} m_1 a &= T_1 - f m_1 g, \\ m_2 a &= T_2 - T_1 - f m_2 g, \\ m_3 a &= m_3 g - T_2. \end{aligned}$$

Sečtením rovnic a následnou úpravou vyjádříme zrychlení a :

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = m_3 g - f g(m_1 + m_2) \rightarrow a = g \frac{m_3 - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Soustava se pohybuje se zrychlením $3,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 body

- b) Velikost tahové síly T_2 určíme dosazením za zrychlení do pohybové rovnice pro těleso o hmotnosti m_3 :

$$T_2 = m_3(g - a) = m_3 \left(g - g \frac{m_3 - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \right) = m_3 g \frac{(m_1 + m_2)(1 + f)}{m_1 + m_2 + m_3} = 12 \text{ N}.$$

Tahová síla mezi tělesem m_2 a m_3 je 12 N.

2 body

Velikost tahové síly T_1 určíme dosazením za zrychlení do pohybové rovnice pro těleso o hmotnosti m_1 :

$$T_1 = m_1(a + f g) = m_1 \left(g \frac{m_3 - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} + f g \right) = m_3 g \frac{m_1(1 + f)}{m_1 + m_2 + m_3} = 5,9 \text{ N}.$$

Tahová síla mezi tělesem m_1 a m_2 je 5,9 N.

2 body

- c) Dosadíme stejné hodnoty hmotností do vztahu pro zrychlení ($m_1 = m_2 = m_3 = m$):

$$a = g \frac{m_3 - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = g \frac{m - 2fm}{3m} = g \frac{1 - 2f}{3} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Soustava by se pohybovala se zrychlením $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 body

- d) Vyjdeme ze vztahu pro zrychlení soustavy a položíme $a = 0$:

$$a = g \frac{m_3 - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 0 \rightarrow m_3 - f(m_1 + m_2) = 0 \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{m_3}{f} = 10 \text{ kg}.$$

Aby se soustava mohla pohybovat rovnoměrně, musí být součet hmotností těles na plošině 10 kg.

2 body