

Řešení úloh 1. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

- 1.a) Podle zákona zachování hybnosti platí $mv_0 = 3mv \Rightarrow v = \frac{v_0}{3} = \frac{2}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 body

- b) Kinetická energie spojených těles se změní na potenciální energii pružnosti:

$$\frac{1}{2}3mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \Rightarrow x_m = v\sqrt{\frac{3m}{k}} = \frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}} = v_0\sqrt{\frac{m}{3k}} = 6,7 \text{ cm}.$$

2 body

- c) Doba pohybu spojeného tělesa k pružině bude $t_1 = \frac{l}{v} = \frac{3l}{v_0} = 0,75 \text{ s}$. Stejnou dobu se bude pohybovat spojené těleso po stejné dráze zpět. Stlačení a opětovné narovnání pružiny bude trvat polovinu doby kmitu pružiny, zatížené závažím o hmotnosti $3m$, tj. $t_2 = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}} = 0,3 \text{ s}$.

Celková doba pohybu spojeného tělesa bude tedy $t = 2t_1 + t_2 = 1,8 \text{ s}$.

2 body

- d) Výsledek v části a) se nezmění.

Na dráze l ztratí spojené těleso část své energie, takže podle ZZE bude:

$$\frac{1}{2}3mv^2 - 3fmg l = \frac{1}{2}kx_m'^2$$

$$x_m' = \sqrt{\frac{3mv^2 - 6fmg l}{k}} = \sqrt{\frac{\frac{mv_0^2}{3} - 6fmg l}{k}} = \sqrt{\frac{m}{3k}(v_0^2 - 18fgl)} = 5,9 \text{ cm}.$$

Pohyb po dráze l bude nyní rovnoměrně zpomalený, tedy $v_2 = v - at'_1$, přičemž $v = \frac{2}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $a = fg$. Na konci dráhy l bude mít spojené těleso rychlost v_2 , pro kterou platí podle ZZE:

$$\frac{1}{2}3mv^2 - 3fmg l = \frac{1}{2}3mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v^2 - 2fgl} = \sqrt{\frac{v_0^2}{9} - 2fgl} = \frac{1}{3}\sqrt{v_0^2 - 18fgl}.$$

Doba pohybu spojeného tělesa k pružině bude $t'_1 = \frac{v-v_2}{a} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 18fgl}}{3fg} = 0,8 \text{ s}$. Stlačení a opětovné narovnání pružiny bude trvat stejně jako v části c) $t_2 = 0,3 \text{ s}$.

Rychlost v_2 bude počáteční rychlostí spojeného tělesa při pohybu v opačném směru. Pohyb bude opět rovnoměrně zpomalený a pro dráhu l bude platit $l = v_2 t'_3 - \frac{1}{2}at_3'^2$. Řešením kvadratické rovnice $fgt_3'^2 - 2v_2 t'_3 + 2l = 0$ dostaneme pro čas t'_3 dva kořeny $t'_3 = \frac{v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 2fgl}}{fg} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 18fgl} \pm \sqrt{v_0^2 - 36fgl}}{3fg}$. Fyzikálně vyhovuje menší kořen $t'_3 = 0,9 \text{ s}$.

Celková doba pohybu nyní bude $t' = t'_1 + t_2 + t'_3 = 2,0 \text{ s}$.

4 body

- 2.a) Lodka se pohybuje rovnoměrně, proto je tahová síla motoru u člunu s jedním motorem $F = kv^2$ a pro člun se dvěma motory $2F = kv_1^2$, proto $v_1 = v\sqrt{2}$.

2 body

- b) Popluje-li loďka po proudu, platí $t_1 = \frac{s}{u+v}$ a $t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{s}{u+v\sqrt{2}}$. Dělením rovnic dostaneme $\frac{u+v\sqrt{2}}{u+v} = 2$, odkud po úpravě dostaneme $\frac{u}{v} = \sqrt{2} - 2 < 0$. Protože velikosti rychlostí jsou kladné, musí loďka plout naopak proti proudu, tedy blíže k prameni řeky je bod B.

3 body

- c) Již víme, že loďka pluje proti proudu. Přitom platí

$$t_1 = \frac{s}{v-u} \quad (1)$$

a

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{s}{v\sqrt{2}-u},$$

odkud po úpravě dostaneme $\frac{u}{v} = 2 - \sqrt{2} > 0$.

Pro hledané doby plavby z B do A (po proudu) platí: $t_3 = \frac{s}{u+v}$ při použití jednoho motoru a $t_4 = \frac{s}{u+v\sqrt{2}}$ při použití dvou motorů. Vyjádřením z rovnice (1) $s = t_1(v-u)$ a dosazením dostaneme

$$t_3 = \frac{s}{u+v} = \frac{v-u}{u+v}t_1 = \frac{1-\frac{u}{v}}{1+\frac{u}{v}}t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}t_1 = 16 \text{ minut}$$

a

$$t_4 = \frac{s}{u+v\sqrt{2}} = \frac{v-u}{u+v\sqrt{2}}t_1 = \frac{1-\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+\sqrt{2}}t_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}t_1 = 12 \text{ minut.}$$

5 bodů

- 3.a) Na počátku děje byl tlak plynu roven atmosférickému tlaku. Po skončení děje je tlak plynu roven součtu atmosférického tlaku a tlaku hydrostatického. Při izotermickém stlačení vzduchu musíme vykonat práci

$$W = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = p_1 S h_1 \ln \frac{p_1 + 2h_2 \rho g}{p_1} = 57 \text{ J.}$$

Protože se vnitřní energie při izotermickém ději nezměnila, je tato práce rovna uvolněnému teple Q .

5 bodů

- b) Zvýšení teploty určíme z Poissonova zákona $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$, ze kterého po dosazení ze stavové rovnice $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ dostaneme

$$T_2^\kappa p_1^{\kappa-1} = T_1^\kappa p_2^{\kappa-1}$$

$$T_2^\kappa = T_1^\kappa \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\kappa-1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1 + 2h_2 \varrho g}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 297 \text{ K.}$$

2 body

Při adiabatickém ději musíme při stlačení plynu vykonat práci, která je rovna zvýšení jeho vnitřní energie. U dvouatomového plynu je to

$$\begin{aligned} W &= \frac{5}{2} n R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} n R T_1 \left[\left(\frac{p_1 + 2h_2 \varrho g}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \\ &= \frac{5}{2} p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_1 + 2h_2 \varrho g}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = 41 \text{ J.} \end{aligned}$$

3 body

- 4.a) Na vysublimování oxidu uhličitýho je potřeba dodat teplo $L_s = m_2 l_s = 29,5 \text{ kJ}$. Při ochlazení vody v kalorimetru z teploty t_1 na teplotu tání ledu t_t voda dodá teplo

$$Q_1 = m_1 c_v (t_1 - t_t) = 10,08 \text{ kJ.}$$

Protože $Q_1 < L_s$, musí ještě část vody o hmotnosti m_3 ztuhnout na led. Vznikne tím $m_3 = \frac{L_s - Q_1}{l_t} = 58 \text{ g}$ ledu.

V soustavě bude 58 g ledu a 142 g vody. Teplota soustavy bude 0°C .

5 bodů

- b) Objem vzniklého oxidu uhličitýho určíme ze stavové rovnice

$$V = \frac{m_2 R T_0}{M_m p_0} = 28 \text{ dm}^3.$$

2 body

- c) V tomto případě $Q_1 = m_1 c_v (t_1 - t_t) = 35,28 \text{ kJ} > L_s$. V soustavě bude nyní jen voda o teplotě t . Z kalorimetrické rovnice $m_1 c_v (t_1 - t) = m_2 l_s$ plyne $t = t_1 - \frac{m_2 l_s}{m_1 c_v} = 2^\circ\text{C}$. Objem vzniklého plynného oxidu uhličitýho za daných podmínek se nezmění.

3 body

5. Protože led se lžičkou uvnitř klesá ke dnu nádoby, musí platit, že tíhová síla je větší než síla vztlaková:

$$(m+M)g > \varrho_v g \left(\frac{M}{\varrho_l} + \frac{m}{\varrho_{\text{Ag}}} \right) \Rightarrow m > \frac{M \left(\frac{\varrho_v}{\varrho_l} - 1 \right)}{1 - \frac{\varrho_v}{\varrho_{\text{Ag}}}} = \frac{(\varrho_v - \varrho_l) \varrho_{\text{Ag}}}{(\varrho_{\text{Ag}} - \varrho_v) \varrho_l} M = 96 \text{ g.}$$

4 body

Protože je teplota ledu menší než teplota tání ledu, začne na led namrzat další led o hmotnosti ΔM

$$\Delta M l_t = c_l M (t_0 - t) \Rightarrow \Delta M = \frac{c_l M (t_0 - t)}{l_t} = 114 \text{ g.}$$

2 body

Aby led s předmětem znovu vystoupil k hladině vody, musí platit

$$(m + M + \Delta M)g < \rho_v g \left(\frac{m}{\rho_{\text{Ag}}} + \frac{M + \Delta M}{\rho_l} \right)$$

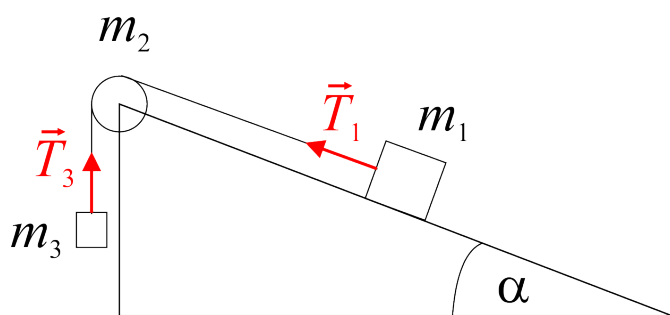
$$m < \frac{(M + \Delta M) \left(\frac{\rho_v}{\rho_l} - 1 \right)}{1 - \frac{\rho_v}{\rho_{\text{Ag}}}} = \frac{(M + \Delta M) (\rho_v - \rho_l) \rho_{\text{Ag}}}{(\rho_{\text{Ag}} - \rho_v) \rho_l} = 107 \text{ g.}$$

4 body

Hmotnost stříbrné lžičky je tedy v intervalu $m \in (96; 107) \text{ g}$.

(Kdybychom vzali v úvahu i tepelnou výměnu mezi lžičkou o hmotnosti 100 g a vodou, zvětšila by se hmotnost ΔM přírůstku ledu o $\Delta m = \frac{mc_{\text{Ag}}(t_0 - t)}{l_t} = 1,3 \text{ g}$, tedy jen asi o 1%).

- 7.a) Označme $\vec{T}_1$ tahovou sílu, kterou působí vlákno na těleso o hmotnosti m_1 a $\vec{T}_3$ tahovou sílu, kterou působí vlákno na těleso o hmotnosti m_3 (obr. 1).



Obr. 1

Na kladku pak působí části vlákna silami $-\vec{T}_1$ a $-\vec{T}_3$. Hledáme velikosti těchto sil a velikost a zrychlení soustavy. Pro každé těleso napíšeme pohybovou rovnici (dvě pro posuvný pohyb koncových těles a jednu pro rotační pohyb kladky):

$$m_1 a = T_1 - m_1 g \sin \alpha - f m_1 g \cos \alpha \quad (1)$$

$$m_3 a = m_3 g - T_3 \quad (2)$$

$$J \varepsilon = M, \quad (3)$$

kde $J = \frac{1}{2} m_2 r^2$ je moment setrvačnosti kladky, $\varepsilon = \frac{a}{r}$ je úhlové zrychlení kladky a $M = T_3 r - T_1 r$ velikost výsledného momentu síly působícího na kladku. Po dosazení do rovnice (3) dostaneme:

$$\frac{1}{2} m_2 a = T_3 - T_1. \quad (4)$$

Řešením rovnic (1), (2) a (4) dostaneme vztahy:

$$a = g \frac{2m_3 - 2m_1(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2m_1 + m_2 + 2m_3} = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2 body

$$T_1 = m_1(a + g \sin \alpha + f g \cos \alpha) = \frac{2m_3 + (m_2 + 2m_3)(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2m_1 + m_2 + 2m_3} m_1 g = 10,6 \text{ N}$$

2 body

$$T_3 = m_3(g - a) = \frac{2m_1(1 + \sin \alpha + f \cos \alpha) + m_2}{2m_1 + m_2 + 2m_3} m_3 g = 11,6 \text{ N}.$$

2 body

- b) Pokud zaměníme tělesa o hmotnostech m_1 a m_3 a budeme předpokládat, že se soustava pohybuje v původním směru, stačí ve vztahu pro zrychlení zaměnit indexy u m_1 a m_3 :

$$a = g \frac{2m_1 - 2m_3(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2m_1 + m_2 + 2m_3} = -1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zrychlení je záporné, soustava se tedy bude pohybovat rovnoměrně zpomaleně.

2 body

Dále budeme předpokládat, že se soustava bude pohybovat tak, že se těleso o hmotnosti m_3 bude pohybovat po nakloněné rovině dolů (indexování tahových sil ponecháme):

$$m_3 a = m_3 g \sin \alpha - f m_3 g \cos \alpha - T_1 \quad (5)$$

$$m_1 a = T_3 - m_1 g \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} m_2 a = T_1 - T_3. \quad (7)$$

Řešením rovnic (5), (6) a (7) dostaneme vztah pro zrychlení:

$$a = g \frac{2m_3(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 2m_1}{2m_1 + m_2 + 2m_3} = -1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

I v tomto případě má zrychlení stejnou velikost a je záporné. Po záměně těles se tedy soustava pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem do zastavení a poté zůstane v klidu.

2 body