

Řešení úloh 1. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

Úlohy navrhli J. Jírů (1), J. Thomas (2, 3, 4, 5, 7), a V. Vícha (6)

- 1.a) V první fázi se lať otočí kolem své opěrné hrany. Její těžiště přitom opíše kruhový oblouk o středovém úhlu φ a dosáhne rychlosti v_0 . Poté se lať odpoutá od opory a její těžiště opisuje jako při šikmém vrhu část paraboly s počáteční rychlostí v_0 za současného rovnoměrného otáčení latě nabytou úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející jejím těžištěm.

Do okamžiku odpoutání latě od opory radiální složka tíhové síly postačuje k udržení latě v otáčivém pohybu kolem opěrné hrany. Předěl nastane při dosažení rovnosti mezi potřebnou dostředivou silou a radiální složkou tíhové síly:

$$\frac{mv_0^2}{\frac{l}{2}} = mg \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gl}{2} \cos \varphi}. \quad (1)$$

Pro úhel φ při odpovídající změně výšky h těžiště dále platí

$$\cos \varphi = \frac{\frac{l}{2} - h}{\frac{l}{2}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi).$$

Ze zákona zachování mechanické energie během této fáze pohybu plyne

$$mgh = \frac{1}{2} J \omega^2,$$

kde $J = \frac{1}{3} ml^2$ je moment setrvačnosti tenké latě vzhledem k ose otáčení v opěrné hraně a kde úhlová rychlost ω splňuje vztah $v_0 = \frac{l}{2} \omega$.

Z uvedených tří vztahů plyne

$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} gh} = \sqrt{\frac{3}{4} gl (1 - \cos \varphi)}. \quad (2)$$

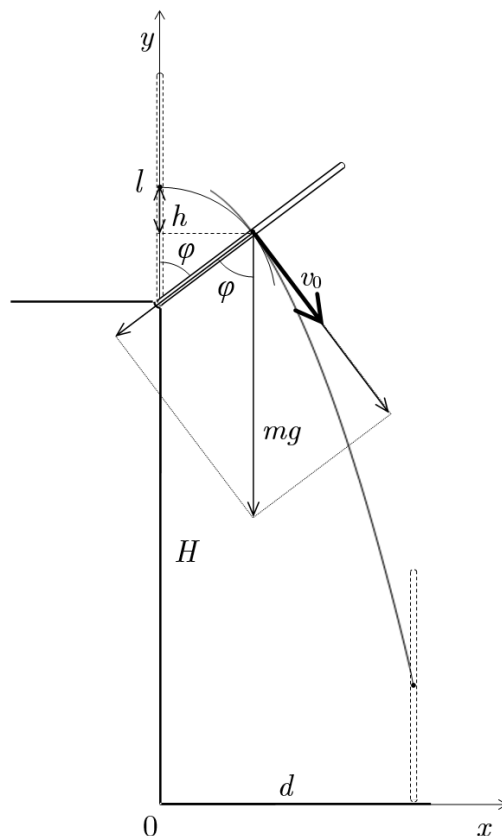
Úhel φ získáme z rovnosti výrazů ve vztazích (1) a (2):

$$\frac{3}{4} gl (1 - \cos \varphi) = \frac{gl}{2} \cos \varphi \Rightarrow 3(1 - \cos \varphi) = 2 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = 0,9273 \text{ rad } (53,13^\circ).$$

Nyní zpětně:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{4} gl (1 - \cos \varphi)} = \sqrt{\frac{3}{10} gl}.$$



Obr. R1

Za dobu t_1 volného letu se lať otočí o úhel $\beta = \pi - \varphi$:

$$\beta = \omega t_1 = \frac{v_0}{l} t_1 = \frac{2v_0}{l} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\beta l}{2v_0}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Souřadnice těžiště ve zvolené soustavě během volného letu latě splňují časové rovnice:

$$x = \frac{l}{2} \sin \varphi + v_0 t \cos \varphi = \frac{2}{5}l + \frac{3}{5}v_0 t, \quad (3)$$

$$y = H + \frac{l}{2} \cos \varphi - v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2 = H + \frac{3}{10}l - \frac{4}{5}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4)$$

Ve vztahu (3) pro $t = t_1$ je $x = d$:

$$d = \frac{2}{5}l + \frac{3}{5}v_0 t_1.$$

Dosazením za $t_1 = \frac{\beta l}{2v_0}$ a poté za β dostaneme

$$d = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\beta \right) l = 1,06l.$$

3 body

Ve vztahu (4) pro $t = t_1$ je $y = \frac{l}{2}$:

$$\frac{l}{2} = H + \frac{3}{10}l - \frac{4}{5}v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2.$$

Dosazením za $t_1 = \frac{\beta l}{2v_0}$ po úpravě dostaneme

$$\frac{l}{2} = H + \frac{3}{10}l - \frac{2}{5}\beta l - \frac{\beta^2 gl^2}{8v_0^2}.$$

Dalším dosazením za $v_0 = \sqrt{\frac{3}{10}gl}$ dostaneme

$$\frac{l}{2} = H + \frac{3}{10}l - \frac{2}{5}\beta l - \frac{5}{12}\beta^2 l.$$

Z rovnice vyjádříme hledanou výšku H a dosadíme za β :

$$H = \frac{1}{5}l + \frac{2}{5}\beta l + \frac{5}{12}\beta^2 l = 3,13l.$$

3 body

2.a) Poměr napětí je roven

$$\frac{U_0}{U_R} = \frac{Z}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}{R}.$$

Pro $f_1 = 100$ Hz je $\frac{U_0}{U_R} = 1,39$, pro $f_2 = 20$ Hz je $\frac{U_0}{U_R} = 7,90$ a pro $f_3 = 300$ Hz je $\frac{U_0}{U_R} = 1,68$.

2 body

Pro fázové posunutí platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}}{R},$$

odtud $\varphi_1 = -44^\circ$, $\varphi_2 = -83^\circ$, $\varphi_3 = 54^\circ$.

V prvních dvou případech proud předbíhá napětí, ve třetím případě napětí předbíhá proud.

2 body

- b) Aby bylo na všech prvcích napětí o stejné velikosti, musí platit $X_L = X_C = R$, tedy při splnění podmínky rezonance:

$$2\pi f_4 L = \frac{1}{2\pi f_4 C} \Rightarrow f_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 159 \text{ Hz.}$$

Druhou část rovnosti ověříme např. takto:

$$X_L = 2\pi f_4 L = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot L = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50 \Omega.$$

1 bod

- c) Protože $U_L : U_R = 2 : 3$, tedy

$$3X_L = 2R \Rightarrow 6\pi f_5 L = 2R \Rightarrow f_5 = \frac{R}{3\pi L} = 106 \text{ Hz.}$$

Protože $X_C : R = 4 : 3$ je $X_C = \frac{4}{3}R$. Pak také

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_5 C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f_5 X_C} = \frac{9L}{8R^2} = 22,5 \mu\text{F.}$$

2 body

- d) V případě paralelního zapojení je $U_R = U_C = U_L = U_0$ a pro proud z fázorového diagramu platí

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2, \text{ kde } I_R = \frac{U_0}{R}, I_L = \frac{U_0}{X_L} = \frac{U_0}{2\pi f L}, I_C = \frac{U_0}{X_C} = U_0 2\pi f C.$$

Obvodem prochází proud

$$I = \sqrt{\left(\frac{U_0}{R}\right)^2 + U_0^2 \left(\frac{1}{2\pi f L} - 2\pi f C\right)^2} = U_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi f L} - 2\pi f C\right)^2} = 1,4 \text{ A}$$

2 body

$$\text{Fázové posunutí } \operatorname{tg} \varphi = R \left(\frac{1}{2\pi f L} - 2\pi f C \right) \Rightarrow \varphi = 44^\circ.$$

1 bod

- 3.a) Na válcovou nádobu působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$ a proti ní vztlaková síla $F_{vz} = V\rho g$. Reakce N dna akvária má velikost stejnou jako výslednice těchto sil

$$\begin{aligned} N = mg - V\rho g &= (\pi R^2 + 2\pi RL) d \cdot 20\rho g - \pi R^2 h \rho g = \\ &= 20\pi (R + 2L) R d \rho g - \pi R^2 \rho g \cdot h. \end{aligned}$$

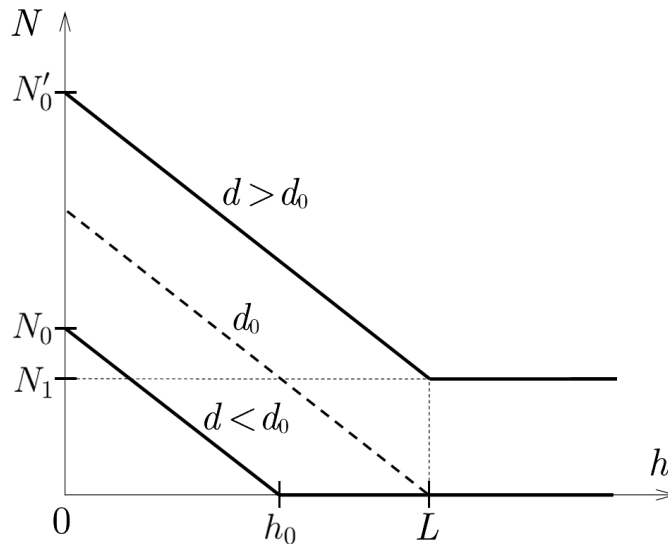
2 body

Funkční závislost platí pro $h \leq L$ a současně musí být nádoba v kontaktu se dnem akvária.

- b) Velikost reakce dna akvária na nádobu je tedy lineární klesající funkcí výšky hladiny v akváriu. Pro $L = R$ můžeme funkční vztah přepsat na tvar

$$N = 60\pi R^2 d \rho g - \pi R^2 \rho g \cdot h.$$

Jsou možné dva případy – buď se nádoba při určité výšce h_0 ode dna zvedne a reakce dál bude nulová (nečárkované hodnoty), nebo zůstane na dně akvária i tehdy, když hladina přesáhne výšku nádob (čárkované hodnoty). Graf:



Obr. R2

4 body

Z funkční závislosti odvodíme:

$$h = 0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = 60\pi R^2 d \rho g,$$

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = 60d,$$

$$h = L = R \quad \Rightarrow \quad N_1 = 60\pi R^2 d \rho g - \pi R^3 \rho g = \pi R^2 \rho g (60d - R).$$

Předěl nastane pro $N_1 = 0$, tedy pro $d_0 = \frac{R}{60}$.

4 body

- 4.a) Pro ztrátový výkon platí

$$P_z = \alpha (t - t_0).$$

Periodické změny ohřívání vody jsou časově mnohem kratší, než počáteční ohřátí vody z teploty t_0 na teplotu t_1 . Voda a bazén mají tepelnou kapacitu, kterou označíme C . Zapišeme rovnice tepelné rovnováhy pro ohřívání a ochlazování vody mezi blízkými teplotami t_1 a t_2 . Platí

$$(P - P_z) \tau_1 = C (t_2 - t_1),$$

$$P_z \tau_2 = C (t_2 - t_1).$$

Odtud odvodíme vztah pro poměr výkonu a ztrátového výkonu

$$(P - P_z) \tau_1 = P_z \tau_2,$$

$$\frac{P}{P_z} = 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} = 1 + \frac{80}{60} = \frac{7}{3}.$$

5 bodů

- b) Pokud ohřívač nepůjde vypnout, poroste teplota až na hodnotu t_3 , při které se ztrátový výkon P'_z vyrovná tepelnému výkonu P . Ze vztahů

$$P'_z = \alpha (t_3 - t_0) = P,$$

$$P_z = \alpha (t_1 - t_0) = \frac{3}{7}P$$

dostaneme

$$\frac{t_3 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{7}{3} \Rightarrow t_3 = \frac{7t_1 - 4t_0}{3} = 41^\circ\text{C}.$$

5 bodů

- 5.a) Označme délku niti l a velikost síly napínající nit T . Velikost síly napínající nit je rovna součtu velikosti složky tíhové síly působící na kuličku a setrvačné odstředivé síly. Největší síla působí na kuličku v rovnovážné poloze

$$T = mg + \frac{mv^2}{l}.$$

Velikost rychlosti kuličky určíme ze ZZE:

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gl}.$$

Po dosazení do vztahu pro T dostaneme

$$T = mg + \frac{mv^2}{l} = 3mg.$$

2 body

- b) V okamžiku, kdy nit svírá se svislým směrem úhel α , je složka tíhové síly, která napíná nit rovna $F_2 = mg \cos \alpha$ a kulička se pohybuje rychlostí, jejíž velikost odvodíme ze ZZE:

$$mgl \cos \alpha = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl \cos \alpha}.$$

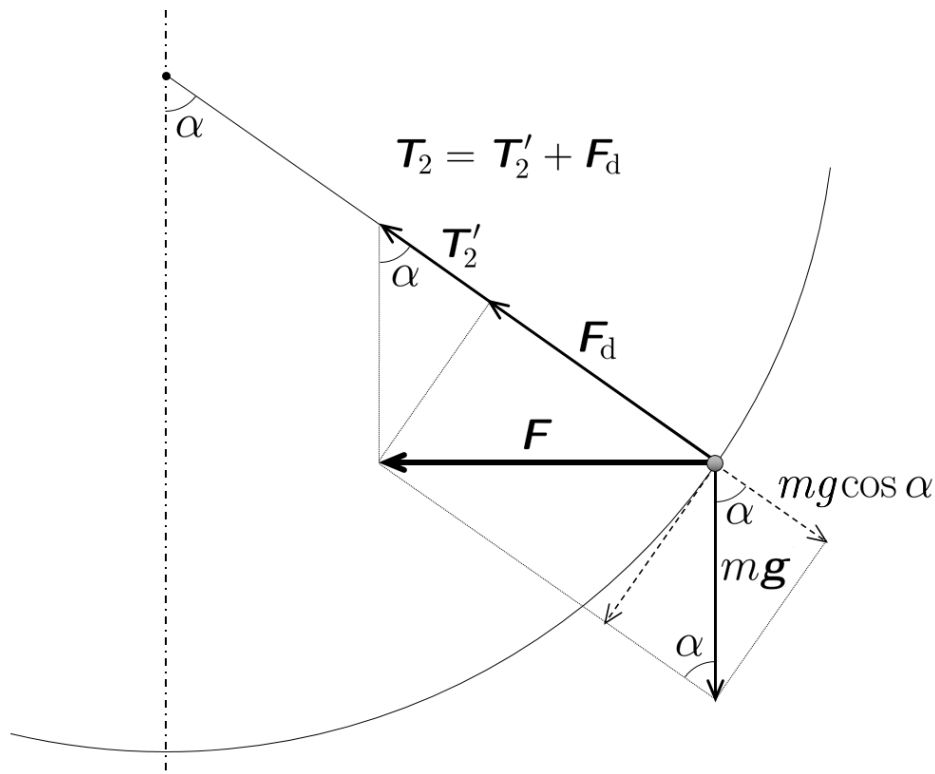
Velikost síly napínající nit bude v tomto případě

$$T_1 = mg \cos \alpha + \frac{mv_1^2}{l} = mg \cos \alpha + 2mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha = 1,5mg.$$

2 body

- c) Na kuličku během jejího pohybu působí dvě síly, svisle dolů tíhová síla $m\mathbf{g}$ a ve směru závěsu tahová síla $\mathbf{T}_2$. Podle zadání jejich výslednice $\mathbf{F}$ má mít vodorovný směr, tedy stejný jako výsledné zrychlení. Z rovnoběžníku sil plyne

$$T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}. \quad (1)$$



Obr. R3

Tahová síla $\mathbf{T}_2$ ve směru závěsu má dva účinky, kompenzuje radiální složku $mg \cos \alpha$ tíhové síly a zakřivuje trajektorii dostředivou silou (rychlost dostaneme opět ze ZZME)

$$F_d = \frac{mv_2^2}{l} = \frac{m}{l} \cdot 2gl \cos \alpha = 2mg \cos \alpha.$$

Velikost tahové síly je

$$T_2 = T_2' + F_d = mg \cos \alpha + 2mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$T_2 = \sqrt{3}mg.$$

3 body

d) Svislá složka rychlosti kuličky má velikost $v_2 = v \sin \beta$, kde $v = \sqrt{2gl \cos \beta}$, tedy

$$v_2 = \sin \beta \sqrt{2gl \cos \beta}.$$

Tato hodnota bude maximální, bude-li maximální výraz

$$y = \sin \beta \sqrt{\cos \beta}.$$

Extrém funkce najdeme derivací:

$$\frac{dy}{d\beta} = \cos \beta \sqrt{\cos \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{2\sqrt{\cos \beta}} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \beta = 55^\circ.$$

3 body

Řešení můžeme také najít numericky pomocí Excelu:

$\frac{\beta}{^\circ}$	$\frac{y = \sin \beta \sqrt{\cos \beta}}{1}$
0	0
5	0,086
10	0,172
15	0,254
20	0,331
25	0,402
30	0,465
35	0,518
40	0,562
45	0,594
50	0,614
55	0,620
60	0,612
65	0,589
70	0,549
75	0,491
80	0,411
85	0,295

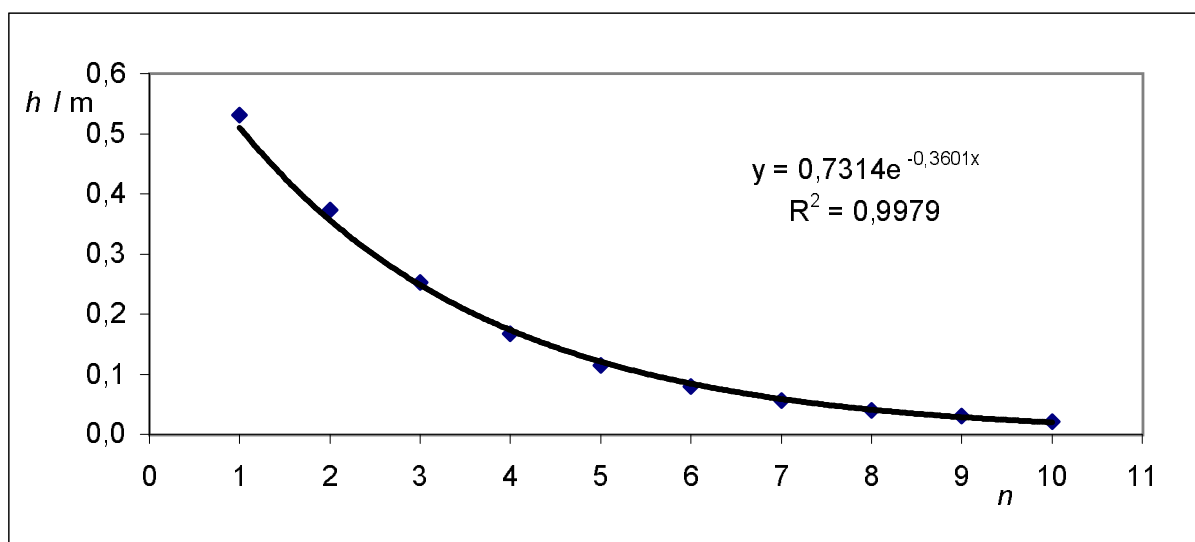
$\frac{\beta}{^\circ}$	$\frac{y = \sin \beta \sqrt{\cos \beta}}{1}$
50	0,614102
51	0,616454
52	0,618265
53	0,619529
54	0,620239
55	0,620387
56	0,619968
57	0,618973
58	0,617397
59	0,61523
60	0,612466

Poznámka: Úhel α v c) a β v d) mají stejnou velikost, protože se jedná o fyzikálně stejnou situaci – pokud je svislá složka zrychlení nulová (část c), musí být svislá složka rychlosti extrémní (část d). Platí

$$T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha} = \sqrt{3}mg \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 55^\circ.$$

6. a-e) Hodnotám naměřeným v ukázce uvedené v zadání přísluší následující tabulka a graf:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t / s	0,553	1,211	1,763	2,217	2,586	2,891	3,146	3,359	3,54	3,698	3,829
τ / s	0,658	0,552	0,454	0,369	0,305	0,255	0,213	0,181	0,158	0,131	///
h / m	0,531	0,374	0,253	0,167	0,114	0,080	0,056	0,040	0,031	0,021	///
τ_{i+1} / τ_i	0,839	0,822	0,813	0,827	0,836	0,835	0,850	0,873	0,829	průměr	0,836
směrodatná odchylka										0,017	



Z tabulky je zřejmé, že doby poskoků tvoří geometrickou posloupnost, neboť poměr sousedních dob poskoku je prakticky konstantní. Kvocient posloupnosti je $q = (0,84 \pm 0,02)$.

Celkovou dobu poskoků určíme pomocí vzorce pro součet nekonečné geometrické řady:

$$t_{\text{celk}} = \frac{\tau_1}{1 - q} \doteq 4,0 \text{ s.}$$

Tato hodnota souhlasí s hodnotou, kterou odečteme ze záznamu.

- f) Poskok míčku je svislý vrh vzhůru se zanedbatelným odporem vzduchu. Pro doby letu platí

$$\tau_i = \frac{2v_i}{g}, \quad \tau_{i+1} = \frac{2v_{i+1}}{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} = q.$$

- g) Pro výšku poskoku platí $h_i = \frac{1}{2}g \left(\frac{\tau_i}{2} \right)^2 = \frac{g\tau_i^2}{8}$.

Poměr výšek dvou po sobě následujících poskoků je rovněž konstantní:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{\tau_{i+1}^2}{\tau_i^2} = q^2.$$

To potvrzuje výsledek exponenciální regrese uvedený v grafu.

- 7.a) Zapišeme stavovou rovnici pro počáteční a koncový stav plynu v nádobě.

$$p_1 V = n_1 R T_0, \quad p_2 V = n_2 R T_0.$$

Pro hledaný poměr platí

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} = 0,959.$$

3 body

- b) Vyrovnání teplot v nádobě je izochorický děj. Platí tedy Charlesův zákon

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_0}{p_2} = 0,983.$$

3 body

- c) Při adiabatickém ději platí

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\kappa}.$$

Po dosazení za poměr teplot z předchozí rovnice

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{p_2}{p_0}.$$

Řešením exponenciální rovnice je

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{\log \frac{p_2}{p_0}}{\log \frac{p_1}{p_0}} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{\log \frac{p_1}{p_0}}{\log \frac{p_1}{p_2}} = 1,41.$$

4 body