Řešení úloh 2. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Úlohy navrhli J. Šlégr (1), Filip Studnička (2, 3) a J. Thomas (4)

1.a) Oběžnou dobu Marsu můžeme určit ze třetího Keplerova zákona:

$$\frac{r_M^3}{r_Z^3} = \frac{T_M^2}{T_Z^2} \quad \Rightarrow \quad T_M = \sqrt{\frac{r_M^3}{r_Z^3}}T_Z = 1{,}87 \text{ roku.}$$

1 bod

b) Opět můžeme využít třetího Keplerův zákon: Přechodová dráhu, která je elipsou s periheliem v oběžné dráze Země a aféliem v oběžné dráze Marsu, se nazývá *Hohmannova trajektorie.* Poloosa této přechodové trajektorie je

$$a = \frac{r_Z + r_M}{2}.$$

Když dosadíme do třetího Keplerova zákona, dostaneme pro celou trajektorii

$$\frac{\left(\frac{r_Z + r_M}{2}\right)^3}{r_Z^3} = \frac{T^2}{T_Z^2} \quad \Rightarrow \quad T_M = \sqrt{\frac{(r_Z + r_M)^3}{(2r_Z)^3}}T_Z,$$

Pro její polovinu (od Země k Marsu) pak máme

$$t = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{2}\sqrt{\frac{(r_M + r_Z)^3}{(2r_Z)^3}} = 0{,}707 \text{ roku.}$$

2 body

c) Hodnota Δv je klíčová, protože součet všech Δv určuje, kolik paliva bude mise vyžadovat. Potřebné palivo roste exponenciálně s celkovým Δv, jak popisuje *Ciolkovského rovnice.*

Kinetická energie na jednotku hmotnosti pro přechodovou dráhu u Země je

$$-\frac{GM_S}{r_Z + r_M} + \frac{GM_S}{r_Z}.$$

Použitím úhlové rychlosti oběhu Země můžeme dosadit

$$GM_S = \frac{4\pi^2 r_Z^3}{T_Z^2}.$$

Rychlost na začátku přechodové dráhy pak vychází

$$v_0 = \sqrt{2GM_S\left(\frac{1}{r_Z} - \frac{1}{r_Z + r_M}\right)} = 32{,}7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

To je rychlost ve vztažné soustavě spojené se Sluncem. Země se kolem Slunce pohybuje průměrnou rychlostí

$$v_Z = \frac{2\pi r_Z}{T_Z} = 29{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

Pak platí

$$\Delta v_1 = v_0 - v_Z = 2{,}8\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

Poznámka: V praxi by bylo nutné nejprve uniknout z gravitačního pole Země, tedy odstartovat z povrchu na nízkou oběžnou dráhu (LEO).

d) Rychlost přechodové dráhy v okamžiku, kdy protíná oběžnou dráhu Marsu, můžeme spočítat z druhého Keplerova zákona:

$$v_{01} = \frac{v_0}{1{,}52} = 21{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

To je rychlost ve vztažné soustavě spojené se Sluncem. Mars se kolem Slunce pohybuje průměrnou rychlostí

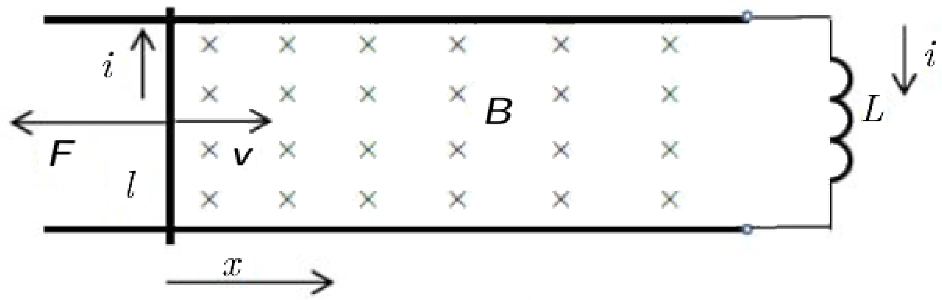
$$v_M = \frac{2\pi r_M}{T_M} = 24{,}2\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

Pak platí

$$\Delta v_2 = v_M - v_{02} = 2{,}7\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

Poznámka: Chceme-li zakotvit na oběžné dráze kolem Marsu, musíme provést brzdicí manévr (Mars Orbit Insertion), kde není cílem „dohnat Mars", ale zpomalením přejít z příletové dráhy na vázanou orbitu kolem Marsu. K tomu stačí snížit rychlost pod únikovou rychlost.

2.a)



Obr. R1

1 bod

Když se vozík pohybuje v magnetickém poli, indukuje se mezi jeho koly (a tím i mezi kolejnicemi) napětí

$$u = Blv.$$

V obvodu vozíku a cívky prochází proud i, který souvisí s napětím vztahem

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Na vozík v magnetickém poli působí brzdicí síla

$$F = Bli.$$

Z hlediska energie v uzavřené soustavě platí

$$\Delta(E_L + E_k) = 0,$$

kde

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2$$

je energie magnetického pole cívky a

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

je kinetická energie vozíku.
Při nárůstu proudu vyvolaného pohybem vozíku klesá kinetická energie vozíku, a tím i jeho rychlost. Energie E_L a tím i proud i dosáhnou maximální hodnoty v okamžiku zastavení vozíku. Proud i a tedy i zpětná síla F dosáhne maximální hodnoty v okamžiku zastavení vozíku a vozík se jejím účinkem začne pohybovat směrem nazpět. Energie E_L cívky se tak mění na kinetickou energii E_k vozíku. Nakonec proud klesne na nulu a vozík opustí magnetické pole s původní rychlostí v_0 (v opačném směru). Tento jev lze nazvat dokonalým pružným odrazem vozíku. **1 bod**

b) Pohybová rovnice vozíku má tvar:

$$ma = -Bil. \tag{1}$$

Mezi kolejnicemi v pohybujícím se vozíku se indukuje v magnetickém poli napětí

$$u = Blv.$$

To souvisí s proudem cívkou vztahem

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

a tedy platí

$$Blv = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Derivováním rovnice (2) dostáváme

$$Bl\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}, \text{ kde } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a.$$

Kombinací této derivace s rovnicí (1) dostáváme rovnici pro proud v obvodu:

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{B^2l^2}{mL}i. \tag{3}$$

2 body

Řešení této rovnice předpokládáme obecně ve tvaru:

$$i(t) = I_0 + I_m \sin(\omega t + \alpha). \tag{4}$$

První a druhá derivace této funkce mají tvar:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega I_m \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Po dosazení do rovnice (3) dostáváme:

$$-\omega^2 I_m \sin(\omega t + \alpha) = -\frac{B^2 l^2}{mL}(I_0 + I_m \sin(\omega t + \alpha)). \tag{5}$$

Odkud vidíme, že funkce (4) vyhovuje rovnici (3), a proto je jejím řešením. Z porovnání levé a pravé strany zároveň dostáváme:

$$I_0 = 0,$$

$$\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}.$$

Pro dané hodnoty platí:

$$\omega = 0{,}73\,\mathrm{s}^{-1}.$$

1 bod

Proud v obvodu je harmonický:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Na začátku (v okamžiku vniknutí vozíku do magnetického pole) je proud $i(0) = 0$, a energie cívky

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

je nulová, což znamená, že ve funkci (5) platí:

$$\sin\alpha = 0,$$

tedy:

$$\alpha = 0.$$

To je počáteční podmínka děje, kterou musí splňovat i funkce (5).
Pro proud tedy platí:

$$i(t) = I_m \sin \omega t.$$

Podle rovnice (2) pak rychlost vychází:

$$v = \frac{L}{Bl}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{Bl}\omega I_m \cos\omega t.$$

Na začátku (v čase $t = 0$) je rychlost pohybu:

$$v_0 = \frac{L}{Bl}\omega I_m.$$

Maximální hodnota proudu je:

$$I_m = \frac{Blv_0}{\omega L} = \sqrt{\frac{m}{L}}v_0 = 0{,}11\,\mathrm{A}.$$

1 bod

c) Funkce $\sin \omega t$ je periodická s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{Bl}\sqrt{mL}.$$

Vozík se zastaví (rychlost nabude nulové hodnoty) za čas

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2Bl}\sqrt{mL}.$$

Pro dané hodnoty $\tau \approx 2{,}2\,\mathrm{s}$.

1 bod

d) Síla působící na vozík:

$$F = -Bli. \tag{6}$$

Pro výpočet tuhosti „magnetické pružiny" potřebujeme vyjádřit vztah mezi proudem i a výchylkou x. Jedna z možností určení tohoto vztahu spočívá ve vyjádření závislosti výchylky x integrací rychlosti:

$$x = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = \frac{L}{Bl}\omega I_m \int_0^t \cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{L}{Bl} I_m \sin\omega t = \frac{L}{Bl} i.$$

Druhou možnost poskytuje funkce (2):

$$Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Jelikož na začátku (v čase $t = 0$) je $x = 0$ a $i = 0$, pro $t > 0$ platí:

$$Blx = Li.$$

Z obou výsledků pro i platí:

$$i = \left(\frac{Bl}{L}\right) x.$$

1 bod

Sílu, která působí na vozík, vyjádříme dosazením proudu i do vztahu (6):

$$F = -\frac{B^2 l^2}{L} x = -kx.$$

Síla je přímo úměrná výchylce a působí proti směru výchylky, což je typické i pro mechanickou pružinu. Tuhost „magnetické pružiny" je:

$$k = \frac{(Bl)^2}{L}.$$

Pro dané hodnoty $k = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. **2 body**

3.a) Protože na hladině vody má být nulová rychlost, bude vypadat zákon zachování energie následovně:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h - L)^2, \tag{1}$$

tedy veškerá potenciální energie skokana se uloží do pružného lana, žádná kinetická nezbývá.

1 bod

Podle Hookeova zákona platí:

$$F = k(h - L). \tag{2}$$

Nyní zapíšeme druhý Newtonův zákon pro skokana v nejnižším bodě:

$$F - mg = ma_0.$$

$$F = ma_0 + mg = 2mg + mg = 3mg. \tag{3}$$

Ve spodní úvrati totiž působí tíhová síla mg dolů, ale chceme, aby výsledná síla byla $2mg$ nahoru. Proto tahová síla lana musí být o mg větší než výsledná síla. Kombinací (2) a (3) dostaneme

$$F = 3mg = k(h - L).$$

Z (1) můžeme vyjádřit

$$k(h - L) = \frac{2mgh}{h - L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{h}{3} = 30 \text{ m},$$

$$k = \frac{2mgh}{(h - L)^2} = \frac{9mg}{2h} = 34 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2 body

Alternativní řešení: Pokud zavedeme prodloužení x lana oproti jeho klidové délce, v nejnižším bodě se lano natáhne o x a skokan tak urazí dráhu $h = L + x$. Ze zákona zachování energie dostaneme

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2,$$

z tahu lana

$$kx = 3mg$$

a řešením této soustavy rovnic obdržíme stejné výsledky pro L a k.

b) V dolní poloze bude lano pružit. Po odeznění těchto oscilací (v rovnovážném stavu) se délka lana prodlouží o

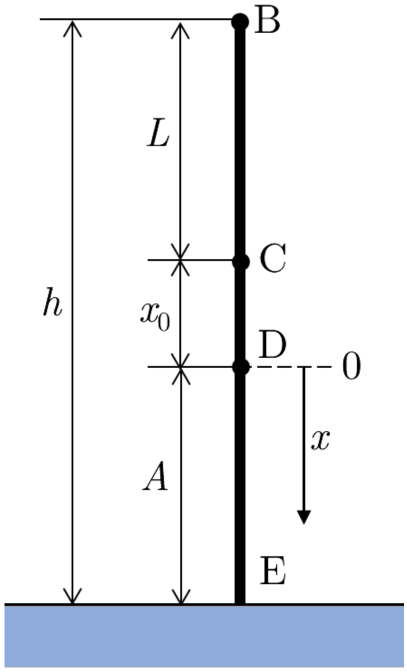
$$x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{2h}{9} = 20 \text{ m}.$$

1 bod

Poznámka: Zdůrazněme, že x_0 je rovnovážné prodloužení po uklidnění, kdežto x (viz *Alternativní řešení*) je maximální prodloužení při skoku. Skokan tedy nejdříve „přetáhne" lano více (až o 60 m), ale po odeznění oscilací zůstane viset v klidové poloze s $x_0 = 20$ m.

c) Maximální rychlosti je dosaženo v bodě D, odpovídajícímu rovnovážné poloze (viz obr. R2). Část energie už je uložena v pružině, takže podle zákona zachování energie platí:

$$E_{k,\max} = E_p - E_{\text{lana}} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_{\max}^2}{2} = mg(L + x_0) - \frac{kx_0^2}{2}.$$



Obr. R2

Odtud

$$v_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = 28 \ \ \mathrm{m} \cdot \ \mathrm{s}^{-1}.$$

1 bod

Všimněme si, že $\sqrt{2gh}$ je rychlost volného pádu z výšky h.

d) Abychom určili čas potřebný k dosažení hladiny vody, zvolme souřadný systém s osou x směřující dolů a bodem D (tj. $x = 0$) jako počátkem v čase $t = 0$. Předpokládejme, že osoba se pohybuje mezi body E a C podle rovnice

$$x = A\sin(\omega t).$$

Stanovme nyní čas potřebný k průchodu úseky BC, CD a DE.

1. Volný pád v úseku BC: Doba pohybu v tomto úseku je

$$t_{\mathrm{BC}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{3g}} = \frac{t_0}{\sqrt{3}},$$

kde $t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ je doba volného pádu z výšky h. **1 bod**

2. Harmonické kmitání po průchodu bodem C:

Jakmile osoba projde bodem C, začne se lano natahovat a následný pohyb lze popsat jako harmonické kmitání (síla pružnosti lana působí směrem zpět a soustava lano–osoba se začne chovat jako oscilátor). Nechť je amplituda kmitání A. Úhlová frekvence tohoto kmitání je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9g}{2h}} = 0{,}70 \ \mathrm{s}^{-1}.$$ **1 bod**

Čas potřebný k dosažení bodu D lze najít z rovnice

$$-x_0 = A\sin(-t_{\mathrm{CD}}\omega), \quad \text{nebo} \quad x_0 = A\sin(\omega t_{\mathrm{CD}}).$$

Protože $x_0 = A/2$, platí

$$\omega t_{CD} = \frac{\pi}{6},$$

z čehož dostáváme:

$$t_{CD} = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi}{18}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\pi}{18}t_0.$$

1 bod

3. Pohyb v úseku DE: Čas pohybu v úseku DE odpovídá čtvrtině periody kmitání T:

$$t_{\mathrm{DE}} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\pi}{6}t_0.$$

1 bod

Celková doba dosažení hladiny vody: Celkový čas t, za který osoba dosáhne hladiny vody, je dán součtem časů jednotlivých úseků:

$$t = t_{\mathrm{BC}} + t_{\mathrm{CD}} + t_{\mathrm{DE}},$$

dosazením

$$t = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9}\right) t_0 = 5{,}5 \text{ s}.$$

1 bod

4.a) Ze stavové rovnice

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT}$$

plyne

$$\rho_0 = \frac{p_0 M_m}{RT_0} = 1{,}225\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

2 body

b) Protože teplota atmosféry klesá lineárně s výškou, můžeme napsat:

$$T = T_0 - \frac{\Delta t}{\Delta z}z = T_0\left(1 - \frac{1}{T_0}\frac{\Delta t}{\Delta z}z\right).$$

Konstanta $T_0 = (15{,}00 + 273{,}15)\,\mathrm{K} = 288{,}15\,\mathrm{K}$ je termodynamická teplota u hladiny moře. Srovnáním se vztahem

$$T(z) = T_0\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

vidíme, že

$$h = \frac{T_0}{\frac{\Delta t}{\Delta z}} = 4{,}433\cdot 10^4\,\mathrm{m}.$$

2 body

c) Změní-li se výška jen o malou vzdálenost Δz, můžeme předpokládat, že se hustota nemění. Změna tlaku vzduchu bude

$$\Delta p = -\rho g \Delta z,$$

kde ρ je hustota vzduchu ve výšce z. Pro tuto hustotu platí

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT} = \frac{pM_m}{RT_0\left(1 - \dfrac{z}{h}\right)}.$$

Dosazením do vztahu pro změnu tlaku vzduchu dostaneme:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z = -\frac{pM_m}{RT_0\left(1 - \dfrac{z}{h}\right)} g \Delta z.$$

Odtud

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\frac{M_m g}{RT_0\left(1 - \dfrac{z}{h}\right)} p.$$

2 body

d) Pro daný výraz

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha}$$

najdeme derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{p_0 \alpha}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1}.$$

Porovnáme s výsledkem v části c):

$$-\frac{p_0 \alpha}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1} = -\frac{M_m g}{RT_0\left(1 - \frac{z}{h}\right)} p.$$

Dosazením za p:

$$-\frac{p_0 \alpha}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1} = -\frac{M_m g}{RT_0} p_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\alpha = \frac{M_m g h}{RT_0} = 5{,}255.$$

2 body

Vztah pro hustotu popisuje funkce

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT} = \frac{p_0\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha} M_m}{RT_0\left(1 - \frac{z}{h}\right)} = \frac{p_0 M_m}{RT_0}\left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1} = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1}.$$

Porovnáním se vztahem pro hustotu

$$\rho_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\beta} = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha - 1}$$

vidíme, že:

$$\beta = \alpha - 1 = 4{,}255.$$

2 body