Řešení úloh 2. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Úlohy navrhli Filip Studnička (1, 2) a J. Šlégr (3, 4)

1. Pohyb kamínků popíšeme šikmým vrhem, pro který platí vztahy

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$
$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

kde v_0 je počáteční rychlost a α elevační úhel vzhledem k vodorovné rovině.

a) V prvním případě jde o zásah místa na poli, tedy ve výšce $y = 0$. Z rovnice pro výšku y určíme čas dopadu t_d, který dosadíme do vzdálenosti dopadu $x = x_d$:

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_d = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g},$$

poté platí

$$x_d = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Minimální bezpečná vzdálenost vrány na poli, tj. maximální vzdálenost dopadu kamene (pro $2\alpha = 90°$), je

$$d_{\min} = \frac{v_0^2}{g} = 160\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

b) Pro bod X$[x; y]$, který může kamínek zasáhnout, platí

$$x_z = v_0 t_z \cos\alpha, \quad y_z = v_0 t_z \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_z^2$$

Po vyloučení času zásahu dostáváme rovnici

$$y_z = v_0 \frac{x_z}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_z}{v_0 \cos\alpha} \right)^2.$$ **1 bod**

Pro zvolený bod vyjádříme úhel vrhu. Pro jeho určení rovnici upravíme do tvaru

$$y_z = x_z \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} \frac{g x_z^2}{v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$$

a po úpravě

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{2 v_0^2}{g x_z} \operatorname{tg}\alpha + \frac{2 v_0^2 y_z}{g x_z^2} + 1 = 0.$$ **2 body**

Rovnice má řešení

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g x_z} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_z} \right)^2 - \left(\frac{2 v_0^2 y_z}{g x_z^2} + 1 \right)}.$$ **2 body**

c) Pokud je diskriminant záporný, zvoleným bodem nemůže procházet žádná trajektorie, a takový bod nemůže kamínek zasáhnout. Hranice oblasti, kterou kamínek zasáhnout může, vyjadřuje podmínka $D = 0$:

$$x_z = x_{\min} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h \right)}.$$ **2 body**

d) Pokud letí vrána ve výšce h, neměla by se dostat do kruhu s poloměrem

$$r = \sqrt{\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{g} - 2h\right)} = 136\ \text{m}.$$ **1 bod**

2.a) Perioda kmitů koule je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}0\ \text{s}.$$ **1 bod**

b) Po zapnutí zdroje získají kuličky náboj $\pm Q$. Jelikož $r \ll d$, můžeme kuličky považovat za bodové náboje. Předpokládejme, že se koule přiblížily, takže se každé vlákno odchýlilo od svislice o malý úhel α. Pro malé úhly platí $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. Přitažlivá síla podle Coulombova zákona

$$F_C = \frac{kQ^2}{(d - 2\alpha l)^2}$$

je v rovnováze s výslednicí tíhové síly a tahové síly vlákna $F = mg\alpha$

$$k\frac{Q^2}{(d - 2\alpha l)^2} = mg\alpha \quad \Rightarrow \quad k\frac{Q^2}{mg} = \alpha(d - 2\alpha l)^2.$$ **2 body**

Funkce $f(\alpha) = \alpha(d - 2\alpha l)^2$ má maximum v bodě

$$\alpha_0 = d/(6l).$$ **1 bod**

Tomu odpovídá maximální náboj kuliček

$$kQ_{\max}^2 = mg\alpha_0(d - 2\alpha_0 l)^2 = \frac{2mgd^3}{27l} \quad \Rightarrow \quad Q_{\max} = \sqrt{\frac{2mgd^3}{27kl}}.$$ **2 body**

K vychýlení vlákna o úhel $\alpha > \alpha_0$ stačí i menší náboj. Kuličky se k sobě přibližují, pokud se srazí, tak se vybijí a vzdálí do doby, dokud nezískají kritický náboj $Q_{\max}$ potřebný pro srážku. Rozdíl potenciálů mezi koulemi při $Q = Q_{\max}$ se rovná minimálnímu napětí zdroje potřebnému pro srážku koulí:

$$U_{\min} = \varphi_+ - \varphi_- = k\frac{Q_{\max}}{r} - \left(-k\frac{Q_{\max}}{r}\right) = 2\sqrt{\frac{2kmgd^3}{27lr^2}} = 64{,}7\ \text{kV}.$$

2 body

c) Jelikož

$$U_{\min} \ll U_0 = 1{,}0 \cdot 10^6\ \text{V},$$

bude proud roven $I = \dfrac{U_0}{R}$.

Potom doba potřebná k nabití koulí na $Q_{\max}$ je

$$t_0 = \frac{Q_{\max}}{I} = \frac{U_{\min} r}{2k}\frac{R}{U_0} = 18\ \text{s}.$$ **2 body**

3.a) Protože neznáme hmotnosti pro xenon a stroncium, spojíme rovnice do jedné:

$$^{235}\text{U} + {}^{1}\text{n} \rightarrow {}^{140}\text{Ba} + {}^{94}\text{Zr} + 2\,{}^{1}\text{n} + 4e^-.$$

Energetický zisk závisí na hmotnostním schodku, který vypočteme jako rozdíl hmotností na levé a pravé straně rovnice:

$$\Delta m = m(^{235}\mathrm{U}) + m_\mathrm{n} - \left[m(^{140}\mathrm{Ba}) + m(^{94}\mathrm{Zr}) + 2m_\mathrm{n} + 4m_\mathrm{e}\right] = 0{,}216\ u.$$

Uvolněná energie je pak

$$E_1 = \Delta m c^2 = 3{,}22 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} = 201\ \mathrm{MeV}.$$

2 body

b) Kinetická energie relativistických elektronů je rozdílem celkové relativistické energie a energie klidové:

$$E_2 = E_k = \frac{m_\mathrm{e}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{e}^2}{c^2}}} - m_\mathrm{e}c^2 = m_\mathrm{e}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{e}^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Odtud

$$v_\mathrm{e} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{E_2}{m_\mathrm{e}c^2}+1}\right)^2} = 0{,}993\,5c.$$

1 bod

Index lomu je definován jako poměr rychlosti světla ve vakuu a rychlosti světla v daném prostředí:

$$n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{n} = 0{,}752c.$$

1 bod

Elektrony se tedy ve vodě pohybují větší rychlostí, než jakou se v ní šíří světlo. V důsledku toho je možné ve vodě pozorovat Čerenkovovo záření.

c) Objemový průtok vody je

$$Q = \frac{P}{\rho c_v \Delta T} = 13{,}6\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}.$$

1 bod

V primárním okruhu je voda pod tlakem asi 12 MPa, teplota na vstupu je přibližně 270 °C. Za těchto podmínek má přibližně o 20 % vyšší tepelnou kapacitu a odvede tak z reaktoru více tepla.

d) Uvolněné teplo $Q = Pt$ odpovídá počtu štěpení $N = \frac{Q}{E_1}$. Protože při každém štěpení vznikají dva rychlé neutrony, celkový počet neutronů za čas t je

$$N_n = 2\frac{Pt}{E_1}.$$

Pro dané hodnoty

$$N_n = 9{,}00 \cdot 10^{19}.$$

1 bod

Při každém štěpení se spotřebuje jedna molekula UO_2 izotopu ^{235}U s hmotností

$$m(^{235}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O}).$$

Vzhledem k relativnímu obsahu izotopu ^{235}U p_1 v novém palivu je při výkonu P celkový úbytek paliva za den

$$m = \frac{m_1}{p_1}.$$

Na $N_1 = p_1 N$ atomů U^{235} připadá $N_2 = (1-p_1)N$ atomů U^{238}. Hmotnost oxidu uraničitého s N atomy uranu je pak

$$m_1 = N_1\left[m(^{235}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right] + N_2\left[m(^{238}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right].$$

Při výkonu P je celkový úbytek paliva

$$m = \frac{Pt}{E_1}\left\{\left[m(^{235}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right] + \frac{1-p_1}{p_1}\left[m(^{238}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right]\right\} = 35{,}8\ \mathrm{kg}.$$

2 body

e) Pro hmotnost náplně reaktoru platí

$$M = N_1\left[(m(^{235}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right] + \frac{1-p_1}{p_1}N_1\left[(m(^{238}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right],$$

kde N_1 je počet atomů ^{235}U v palivovém článku.
Protože „vyhořelé" palivo má ještě obsah p_2 procent ^{235}U, zúčastní se „vyhoření" palivového článku

$$N_1\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)$$

atomů, pro které platí

$$N_1\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{Pt}{E_1}.$$

Vyjádříme-li počet atomů N_1 pomocí hmotnosti M a dosadíme do předchozího vztahu, dostaneme

$$t_v = M\frac{E_1}{P}\frac{p_1 - p_2}{p_1\left[m(^{235}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right] + \left(1 - p_1\right)\left[m(^{238}\mathrm{U}) + 2m(^{16}\mathrm{O})\right]}.$$

Pro dané hodnoty $t_v = 7{,}99 \cdot 10^7\ \mathrm{s} = 2{,}53$ roku. **2 body**

Poznámka: Jedna palivová kazeta stráví v reaktoru až pět let, přičemž se v reaktoru přesunuje vůči středu a otáčí se (kazety mají šestiúhelníkový průřez), aby „vyhořívala" rovnoměrně.

Na této úloze se podílel Odbor reaktorové fyziky a chemických režimů jaderné elektrárny Dukovany.

4.a) Vyjdeme z Boylova-Mariottova zákona v modifikované formě $\frac{p}{\rho} = $ konst., který lze pro dva různé stavy (na hladině moře a ve výšce h) přepsat jako

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p_a}{\rho}.$$

Dále použijeme stavovou rovnici ideálního plynu $p_a V = nRT$, kterou lze s využitím $n = \frac{m}{M_m}$ a $\rho = \frac{m}{V}$ upravit na

$$p_a = \frac{m}{V}\frac{RT}{M_m} = \rho\frac{RT}{M_m}.$$

Vztah mezi hustotou a tlakem ze stavové rovnice dosadíme do rovnice hydrostatické rovnováhy:

$$\mathrm{d}p_a = -\rho g \mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p_a = -\frac{p_a \rho_0}{p_0} g \mathrm{d}y.$$

Separujeme proměnné a integrujeme obě strany rovnice v mezích od p_0 do p_a pro tlak a od 0 do h pro výšku:

$$\int_{p_0}^{p_a} \frac{\mathrm{d}p_a}{p_a} = -\int_0^h \frac{\rho_0}{p_0} g \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{p_a}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0}{p_0} gh.$$

Upravíme na exponenciální tvar:

$$\frac{p_a}{p_0} = \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}.$$

Výraz $\dfrac{\rho_0}{p_0}$ můžeme nahradit výrazem $\dfrac{M_m}{RT}$ a dostaneme

$$p_a = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{M_m}{RT} gh}.$$

2 body

b) Hledáme výšku H_T, kde $p_a(H_T) = 0{,}01 p_0$. Z barometrické rovnice

$$p_a(H_T) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{M_m}{RT} g H_T} \;\Rightarrow\; H_T = -\frac{RT}{M_m g} \ln\frac{p_a(H)}{p_0} = -\frac{RT}{M_m g} \ln\frac{0{,}01 p_0}{p_0} = 40\ \mathrm{km}.$$

1 bod

c) Pro adiabatický děj platí, že $Q = 0$ (nedochází k výměně tepla s okolím). Proto

$$\Delta(U + pV) + \Delta E_p = 0.$$

1 bod

Pro změnu entalpie jednoho molu platí

$$\Delta\left(U + pV\right) = c_p \Delta T,$$

kde c_p je molární tepelná kapacita při konstantním tlaku. Pro změnu potenciální energie platí

$$\Delta E_p = M_m g \Delta h,$$

kde M_m je molární hmotnost vzduchu, g je tíhové zrychlení a Δh je změna výšky. Dosazením dostaneme

$$c_p \Delta T + M_m g \Delta h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta h} = -\frac{M_m g}{c_p} = -\frac{2 M_m g}{7R}.$$

2 body

Poznámka: Rovnost $c_p = \frac{7}{2}R$ platí pro ideální dvouatomový plyn při běžných teplotách. Při velmi nízkých teplotách se neuplatňují všechny rotační stupně volnosti a hodnota c_p se snižuje, při velmi vysokých teplotách se začínají projevovat i vibrační stupně volnosti a hodnota c_p se zvyšuje.

Závislost teploty na výšce tedy bude

$$T = T_0 - \frac{2M_m g}{7R} h.$$ **1 bod**

d) Výšku atmosféry v adiabatickém modelu můžeme odhadnout z podmínky $T = 0$ K:

$$T_0 = \frac{2M_m g}{7R} H_a \quad \Rightarrow \quad H_a = \frac{7RT_0}{2M_m g} = 31 \text{ km}.$$ **1 bod**

Výpočet je sice zjednodušený (v reálné atmosféře teplota neklesá lineárně), ale výsledek se shoduje s tloušťkou troposféry, nejnižší vrstvy atmosféry, kde dochází k většině meteorologických jevů.

e) Spodní okraj mraků se tvoří v místě dosažení rosného bodu, tj. ve výšce, kde se teplota vzduchu rovná teplotě rosného bodu. **1 bod**

Průsečík těchto dvou křivek v grafu je přibližně ve výšce $h_0 = 6$ km.

1 bod