

Řešení úloh 1. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

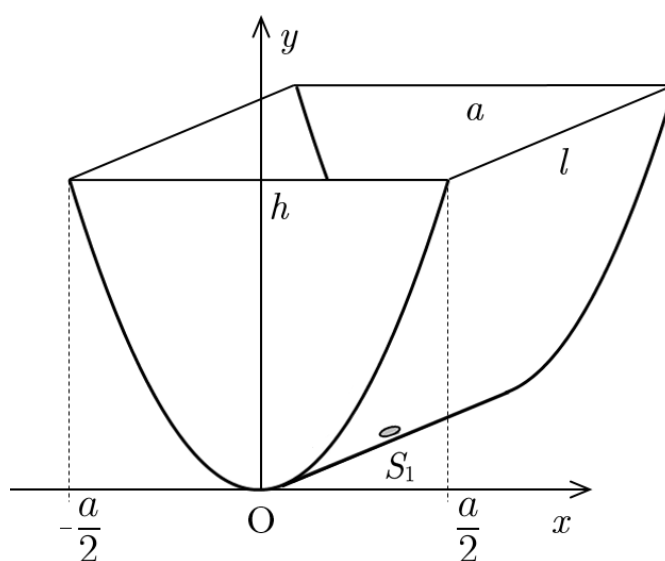
Úlohy navrhli J. Jírů (1), J. Šlégr (2), F. Studnička (3), J. Thomas (4, 5),
M. Jarešová (6) a J. Blažek (7)

- 1.a) V přední stěně žlabu zvolíme souřadnicový systém Oxy podle obrázku R1. Z rozměrů žlabu určíme rovnici paraboly $y = kx^2$. Dosazením $x = \frac{a}{2}$, $y = h$ dostaneme

$$k = \frac{4h}{a^2},$$

neboli

$$y = kx^2 = \frac{4h}{a^2}x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{h}}\sqrt{y}.$$



Obr. R1

Označme v velikost rychlosti pohybu hladiny ve výšce y . Z rovnice spojitosti pro okamžitou úroveň hladiny a výtokový otvor

$$2xl \cdot v = S_1 \cdot \sqrt{2gy}$$

plyne

$$v = \frac{S_1 \sqrt{2gy}}{2xl} = \frac{S_1 \sqrt{2g \cdot \frac{4h}{a^2} x^2}}{2xl} = \frac{S_1}{al} \sqrt{2gh} = \text{konst.}$$

Velikost rychlosti nezávisí na poloze hladiny, pohyb hladiny je rovnoměrný. Doba výtoku pak je

$$T = \frac{h}{v} = \frac{ahl}{S_1 \sqrt{2gh}} = \frac{al}{S_1} \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

5 bodů

- b) Objem vody je

$$V = S_p l = l \cdot \left(ah - 2 \int_0^{\frac{a}{2}} y dx \right) = l \cdot \left(ah - 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{4h}{a^2} x^2 dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= hl \cdot \left(a - \frac{8}{a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx \right) = hl \cdot \left(a - \frac{8}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{a}{2}} \right) = \\
&= hl \cdot \left(a - \frac{8}{a^2} \cdot \frac{a^3}{24} \right) = ahl \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} ahl.
\end{aligned}$$

Pro souřadnici těžiště vodního tělesa v plném žlabu o objemu V a hmotnosti m platí

$$my_T = \rho V y_T = \frac{2}{3} \rho a l h y_T,$$

$$\begin{aligned}
my_T &= \int_0^h y dm = \int_0^h y \cdot \rho l 2x dy = \int_0^h 2\rho l \cdot \frac{a}{2\sqrt{h}} \sqrt{y} \cdot y dy = \\
&= \frac{\rho a l}{\sqrt{h}} \int_0^h y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2\rho a l}{5\sqrt{h}} \left[y^{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{2}{5} \rho a h^2 l.
\end{aligned}$$

Z rovnosti získaných výrazů dostaneme

$$y_T = \frac{3}{5} h.$$

Potenciální tlaková energie vody pak je

$$E_p = mgy_T = \rho V gy_T = \rho \cdot \frac{2}{3} ahl \cdot g \cdot \frac{3}{5} h = \frac{2}{5} \rho a h^2 l g.$$

5 bodů

Alternativní řešení a): Označme v_1 okamžitou výtokovou rychlost otvorem. Pak pro diferenciál času dt , za který se voda ve výtokovém otvoru posune o diferenciální dráhu ds , platí

$$dt = \frac{ds}{v_1} = \frac{\frac{dV}{S_1}}{\sqrt{2gy}} = \frac{2lx dy}{S_1 \sqrt{2g \cdot \frac{4h}{a^2} x^2}} = \frac{al}{S_1 \sqrt{2gh}} dy.$$

Integrací dostaneme

$$T = \frac{al}{S_1 \sqrt{2gh}} \int_0^h dy = \frac{ahl}{S_1 \sqrt{2gh}} = \frac{al}{S_1} \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

Alternativní řešení b): Představme si, že kapalinu vtlačujeme výtokovým otvorem proti rostoucímu hydrostatickému tlaku. Vtlačení kapaliny o elementárním objemu dV vykoná vnější síla práci rovnou přírůstku potenciální tlakové energie:

$$dW = dE_p = p \cdot dV = \gamma \rho g \cdot 2xl \cdot dy = \gamma \rho g \cdot 2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{h}} \sqrt{y} \cdot l \cdot dy = \frac{\rho g a l}{\sqrt{h}} \cdot y^{\frac{3}{2}} dy$$

Celkovou práci, a tím celkovou potenciální tlakovou energii, dostaneme integrací:

$$W = E_p = \frac{\rho g a l}{\sqrt{h}} \int_0^h y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{\rho g a l}{\sqrt{h}} \left[\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{2}{5} \rho a h^2 l g.$$

2.a) Střední hustota hvězdy

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} = 2,79 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

b) Vlnová délka maxima spektrální hustoty vyzařování

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Jde o ultrafialové záření.

2 body

c) Výkon vyzařovaný z povrchu hvězdy určuje Stefan–Boltzmannův zákon

$$P = \sigma T^4 S = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Pro chladnutí použijeme kalorimetrickou rovnici

$$Mc\Delta T = P\tau.$$

Odtud máme

$$c = \frac{P\tau}{M\Delta T} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4 \tau}{M\Delta T} = 5,45 \cdot 10^8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Poznámka: Vyzařovaný výkon závisí na teplotě T . Proto řešením odpovídající diferenciální rovnice získáme přibližně o 1 % nižší výsledek:

$$\int_T^{T-\Delta T} \frac{dT}{T^4} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{cM} \int_0^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad c = \frac{12\pi R^2 \sigma \tau}{M \left[\frac{1}{(T-\Delta T)^3} - \frac{1}{T^3} \right]} = 5,41 \cdot 10^8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

d) Foton záření s vlnovou délkou λ a energií $E = \frac{hc}{\lambda}$ má hmotnostní ekvivalent

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Pokud m považujeme za gravitační hmotnost fotonu, je potenciální energie fotonu na povrchu hvězdy

$$E_p = -G \frac{Mm}{R} = -G \frac{Mh}{Rc\lambda_0}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Využijeme zákon zachování mechanické energie v gravitačním poli

$$\frac{hc}{\lambda_0} - G \frac{Mh}{Rc\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda}, \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

kde λ je vlnová délka pozorovaná ve velké vzdálenosti od hvězdy ($E_p \rightarrow 0$). Změna vlnové délky

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{GM}{Rc^2}.$$

Pro dané hodnoty $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 2,67 \times 10^{-4}$.

1 bod

Tato změna je měřitelná a představuje jeden z důkazů správnosti Einsteinovy speciální teorie relativity.

3.a) Admitance obvodu podle náhradního schématu je

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left[C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right].$$

Podmínka nulové imaginární části admitance je

$$C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0,$$

odkud máme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} = 2\pi f_0.$$

Podmínka existence rezonanční frekvence je $R < \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$, kde R_0 představuje tzv. charakteristický odpor jednobranu. **1 bod**

Pro dané hodnoty $R_0 = 820 \Omega$. Pro dané hodnoty $f_0 = 44 \text{ MHz}$. **2 body**

- b) Pro $\omega > \omega_0$ je imaginární část admitance kladná, jednobran má kapacitní vlastnosti. Pro velmi vysoké frekvence $\omega \gg R/L$ klesá reálná část i záporná složka imaginární části admitance k nule a jednobran má vlastnosti čistého kondenzátoru s kapacitou C . Pro $R > R_0$ má jednobran kapacitní vlastnosti nezávislé na frekvenci.

Pokud je splněna podmínka rezonance $R < R_0$ a platí $\omega < \omega_0$, imaginární část admitance je záporná, obvod má induktivní vlastnosti. Pokud je splněna podmínka rezonance $R < R_0$ a platí $\omega \ll \omega_0$, imaginární část admitance se blíží k nule a reálná část k hodnotě $1/R$, obvod má vlastnosti ideálního rezistoru. **2 body**

- c) Fázorový diagram pro daný případ je na obr. R2.

Rovnice

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2$$

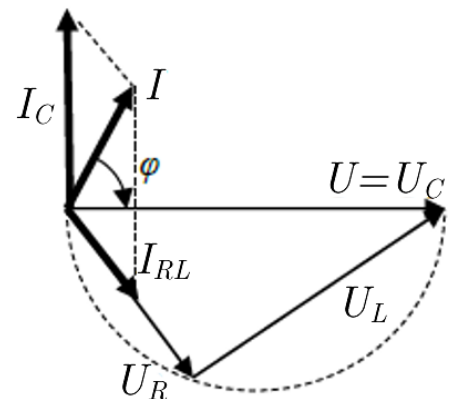
popisuje pravoúhlý trojúhelník na Thaletově kružnici.

Poměr odvěsen je

$$\frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R} = 1,7.$$

Poměr proudů

$$\frac{I_C}{I_{RL}} = \omega C \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \approx 1,8.$$



Obr. R2

2 body

Fázor proudu I_{RL} má směr fázoru U_R a fázor proudu I_C svírá s fázorem napětí zdroje U úhel 90° .

Fázový rozdíl mezi napětím a proudem je argument komplexní impedance

$$\frac{U}{I} = Z = \frac{1}{Y}.$$

Fázový rozdíl mezi napětím a proudem

$$\varphi = -\arctan \frac{\text{Im } Y}{\text{Re } Y} = -\arctan \frac{\omega(CR^2 + \omega^2 CL^2 - L)}{R} = -60,5^\circ.$$

Výsledek potvrzuje skutečnost, že pro $f > f_0$ má obvod kapacitní vlastnosti.

1 bod

d) Proud rezistorem R

$$I_{RL} = \frac{U}{R + j\omega L}.$$

Činný výkon zdroje je roven elektrickému výkonu rezistoru

$$P = RI_{RL}^2 = \frac{U^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} = 63 \text{ mW}.$$

2 body

Druhá možnost výpočtu je $P = UI \cos \varphi$ se stejným výsledkem.

4.a) Jádru polonia obsahuje 84 protonů a 126 neutronů. Sečteme-li klidové hmotnosti protonů a neutronů, dostaneme

$$m_{p+n} = 84 \cdot 1,672\,62 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 126 \cdot 1,674\,93 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,515\,41 \cdot 10^{-25} \text{ kg}.$$

Skutečná hmotnost jádra je

$$m_{\text{Po}} = 209,936\,79 \cdot 1,660\,539 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,486\,082 \cdot 10^{-25} \text{ kg} < m_{p+n}.$$

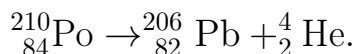
2 body

b) Vazebná energie jádra

$$\begin{aligned} E_V &= (m_{p+n} - m_{\text{Po}}) c^2 = (3,515\,41 \cdot 10^{-25} - 3,486\,082 \cdot 10^{-25}) \cdot (2,997\,92 \cdot 10^8)^2 \text{ J} = \\ &= 2,636 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 1,645 \text{ GeV} \end{aligned}$$

2 body

c) Rovnice radioaktivního rozpadu je



1 bod

$$1 \text{ mg vzorku obsahuje } N_0 = \frac{m}{m_{\text{Po}} + 84m_e} = \frac{10^{-6}}{3,486\,847 \cdot 10^{-25}} = 2,867\,92 \cdot 10^{18} \text{ atomů}.$$

1 bod

Podle zákona radioaktivní přeměny

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow T = t \cdot \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{N}{N_0}} = 138 \text{ dní}.$$

2 body

Počáteční aktivita vzorku

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} \cdot N_0 = 1,670 \cdot 10^{11} \text{ Bq}.$$

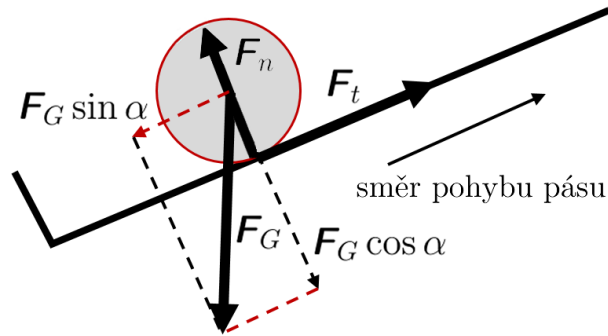
1 bod

Z rovnice radioaktivního rozpadu

$$t_1 = T \cdot \frac{\ln \frac{N}{N_0}}{\ln \frac{1}{2}} = 138 \cdot \frac{\ln 0,1}{\ln \frac{1}{2}} \text{ dní} = 458 \text{ dní}.$$

1 bod

5.a) Obrázek:



Obr. R3

1 bod

- b) Ve směru rovnoběžném s pásem působí na kuličku nahoru síla statického tření F_t a dolů složka $F_g = mg \sin \alpha$ tíhové síly F_G :

$$ma = F_t - mg \sin \alpha. \quad (1)$$

Kulička se bude otáčet působením síly tření F_t , takže kromě rovnice (1) bude splněna pohybová rovnice otáčení (za kladný směr považujeme směr hodinových ručiček):

$$I\varepsilon = -F_t R. \quad (2)$$

Při valivém pohybu bez prokluzování kuličky platí $v = \omega R$, resp. $a = \varepsilon R$. Z rovnic (1) a (2) tedy máme pro sílu statického tření

$$F_t = \frac{2}{7} mg \sin \alpha.$$

Pro statické tření platí podmínka $F_t \leq f F_n = f mg \cos \alpha$, a tedy

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{7}{2} f. \quad (3)$$

1 bod

Při valivém pohybu je zrychlení hmotného středu kuličky

$$a = a_v = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} = -\frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (4)$$

1 bod

- c) Ve směru rovnoběžném s pásem po dopadu na pás působí na kuličku síla smykového tření směrem nahoru a složka tíhové síly směrem dolů. Dosazením síly smykového tření

$$F_t = f mg \cos \alpha \quad (5)$$

do rovnice (1) dostaneme zrychlení a posuvného pohybu těžiště kuličky po povrchu pásu směrem nahoru

$$a = g \cos \alpha (f - \operatorname{tg} \alpha). \quad (6)$$

Kulička se bude pohybovat směrem nahoru pouze pokud $a > 0$, tj. pokud platí

$$\operatorname{tg} \alpha < f. \quad (7)$$

2 body

V opačném případě bude kulička prokluzovat a zůstane na dolním konci pásu.

- d) Mohou nastat dva případy podle úhlu a sklonu pásu: Pokud není splněna podmínka (7), zůstane kulička na dolním okraji pásu a bude se otáčet na místě.

Pokud je splněna podmínka (7) a současně je splněna i podmínka (3), na začátku bude kulička prokluzovat, ale pokud je pás dostatečně dlouhý, postupně přejde do valivého pohybu.

Uvažujme druhý případ: Kulička se pohybuje nahoru se zrychlením (6) a rychlost jejího hmotného středu je

$$v = at = t g \cos \alpha (f - \operatorname{tg} \alpha).$$

Působením momentu síly tření $M = -RF_t$ se kulička roztáčí, přičemž platí

$$I\varepsilon = M = -Rfmg \cos \alpha.$$

Úhlová rychlost

$$\omega = \varepsilon t = -t \frac{R}{I} fmg \cos \alpha.$$

Bod dotyku kuličky s pásem se pohybuje rychlostí $v_d = v - \omega R$. Pokud bod dosáhne rychlosti v_0 pásu, přestane kulička prokluzovat a přejde do valivého pohybu. Čas t_1 přechodu do valivého pohybu od okamžiku dopadu na pás určíme z rovnice

$$v_d = t_1 g \cos \alpha (f - \operatorname{tg} \alpha) + t_1 \frac{R^2}{I} fmg \cos \alpha = v_0,$$

odkud máme

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Za tento čas získá těžiště kuličky rychlost

$$v_1 = v_0 \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha}$$

a urazí dráhu

$$d_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1 = \frac{v_0^2}{2g} \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{\left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha\right)^2}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Dále pokračuje kulička už valivým pohybem s počáteční rychlostí v_1 a se zrychlením a podle rovnice (4) až do zastavení, přičemž ujede dráhu

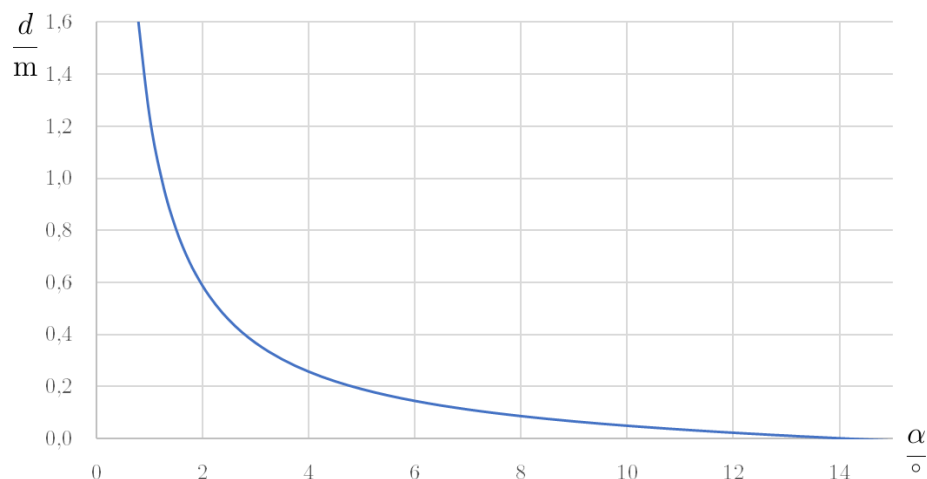
$$d_2 = -\frac{v_1^2}{2a_v} = \frac{7v_0^2}{10g \sin \alpha} \frac{(f \cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha\right)^2}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Celková dráha až do zastavení v nejvyšším bodě dráhy je

$$d = d_1 + d_2 = \frac{v_0^2}{5g \sin \alpha} \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Poznámka: Možný je i jiný tvar výsledku.

e) Graf



Obr. R4

1 bod

Z grafu určíme maximální úhel sklonu $\alpha_{\max} \approx 1,5^\circ$.

1 bod

6.a) Platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

kde platí $a + a' = l$. Po dosazení do zobrazovací rovnice dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} = \frac{1}{f}.$$

Po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici v proměnné a :

$$a^2 - al + lf = 0. \quad (1)$$

Mají-li vzniknout dva ostré obrazy, musí mít rovnice (1) dva různé reálné kořeny, tj. diskriminant $D = l^2 - 4lf > 0$, z čehož $\frac{l}{f} > 4$.

b) Řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{2}(l + \sqrt{l^2 - 4lf}), \quad a_2 = \frac{1}{2}(l - \sqrt{l^2 - 4lf}).$$

c) Určíme $d = |a_1 - a_2| = \sqrt{l^2 - 4lf}$. Po umocnění dostaneme $d^2 = l^2 - 4lf$, z čehož

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}. \quad (2)$$

d) Než začneme s vlastním měřením ohniskové vzdálenosti čočky, musíme nastavit vhodnou vzdálenost mezi předmětem a stínítkem, abychom při pohybu čočky po optické ose v prostoru mezi předmětem a stínítkem obdrželi v průběhu pohybu dva ostré obrazy. Pak změříme příslušnou vzdálenost l , následně si označíme polohy čočky, při níž obrazy vzniklé na stínítku byly ostré. Po změření vzdálenosti těchto poloh již můžeme užitím vztahu (2) určit ohniskovou vzdálenost čočky.

7. Označme $x \equiv \frac{V}{V_0}$. Speciálně $x_A = \frac{1}{4}$, $x_B = \frac{3}{4}$.

a) Tlak p je dán rovnicí přímky v p - V diagramu:

$$\frac{p}{V_0 - V} = \frac{p_0}{V_0} \Rightarrow p = p_0 \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) = p_0(1 - x).$$

Teplotu určíme ze stavové rovnice ideálního plynu:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_A V_A}{T_A} \Rightarrow T = \frac{16T_A}{3} x(1 - x).$$

2 body

b) Během děje $V_A \rightarrow V$ přijme plyn od okolí teplo $Q = \Delta U + W$, kde ΔU je změna jeho vnitřní energie a W je práce, kterou vykoná na okolí. Změna vnitřní energie plynu je

$$\Delta U = n \frac{5R}{2} (T - T_A),$$

kde n značí počet molů. Součin nR stanovíme ze stavové rovnice plynu ve stavu A:

$$nR = \frac{p_A V_A}{T_A}.$$

Po dosazení za T a nR do výrazu pro ΔU obdržíme

$$\Delta U = \frac{5}{2} p_0 V_0 \left[x(1 - x) - \frac{3}{16} \right].$$

Vyjádříme ještě práci plynu

$$W = (V - V_A) \frac{p + p_A}{2} = \frac{p_0 V_0}{2} \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{7}{4} - x\right)$$

a oba výrazy sečteme:

$$Q = \frac{p_0 V_0}{2} \left(7x - 6x^2 - \frac{11}{8}\right).$$

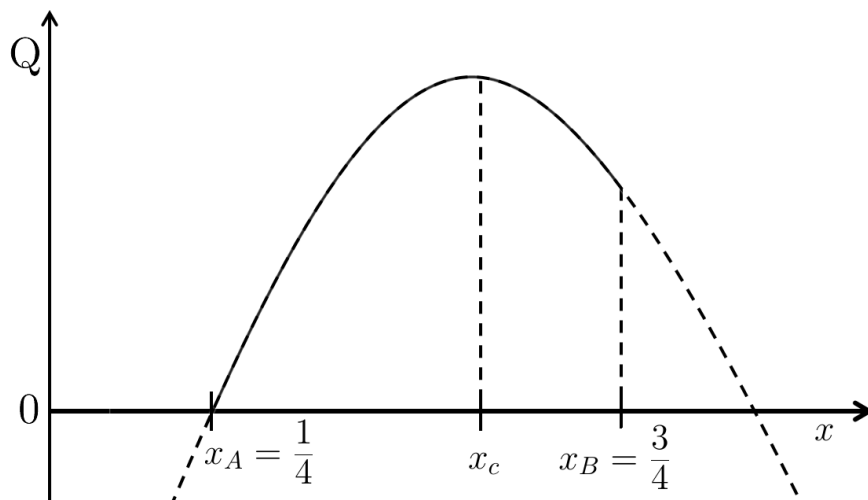
3 body

c) Grafem funkce $Q(x)$ je „obrácená“ parabola (obr. R5) s maximem v jistém bodě $x_C = \frac{V_C}{V_0}$. Toto maximum můžeme určit jako střed mezi kořeny kvadratické rovnice $Q(x) = 0$:

$$x_C = \frac{\frac{1}{4} + \frac{11}{12}}{2} = \frac{7}{12}.$$

Během přechodu plynu od A do C veličina $Q(x)$ roste – teplo přechází z okolí do plynu. Od C do B je funkce $Q(x)$ klesající – teplo přechází z plynu do okolí. Ke změně toku tepla mezi plynem a okolím dochází při dosažení objemu $V_C = \frac{7}{12} V_0$.

3 body



Obr. R5

d) Teplo, které z okolí do plynu přiteče, je dáno výrazem

$$Q_+ = Q(x_C) = \frac{p_0 V_0}{3}.$$

Teplo, které z plynu do okolí odteče, určíme jako rozdíl tepel, které plyn přijal ve stavech C a B:

$$Q_- = Q(x_C) - Q(x_B) = \frac{p_0 V_0}{3} - \frac{p_0 V_0}{4} = \frac{p_0 V_0}{12}.$$

2 body