Řešení úloh okresního kola 63. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2021/2022

Kategorie E

Autoři úloh: L. Richterek (1), J. Thomas (4) a I. Volf (2, 3)

FO63E2-1: Ester Ledecká na ZOH 2018

a) Označme rychlosti v jednotlivých úsecích $v_1 = 92{,}01\,\mathrm{km/h} \doteq 25{,}56\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 91{,}13\,\mathrm{km/h} \doteq 25{,}31\,\mathrm{m/s}$, $v_3 = 88{,}15\,\mathrm{km/h} \doteq 24{,}49\,\mathrm{m/s}$ a $v_4 = 85{,}74\,\mathrm{km/h} \doteq 23{,}82\,\mathrm{m/s}$. Podobně časy, v nichž Ester Ledecká projela jednotlivé časomíry, jsou podle tabulky $t_1 = 6{,}12\,\mathrm{s}$, $t_2 = 41{,}15\,\mathrm{s}$, $t_3 = 63{,}70\,\mathrm{s}$ a $t_4 = 81{,}11\,\mathrm{s}$. Délka jednotlivých úseků vychází

$$s_1 = v_1 t_1 = 25{,}56\,\mathrm{m/s} \cdot 6{,}12\,\mathrm{s} = 156{,}43\,\mathrm{m} \doteq 156{,}4\,\mathrm{m},$$
$$s_2 = v_2\,(t_2 - t_1) = 25{,}31\,\mathrm{m/s} \cdot (41{,}15\,\mathrm{s} - 6{,}12\,\mathrm{s}) = 886{,}61\,\mathrm{m} \doteq 886{,}6\,\mathrm{m},$$
$$s_3 = v_3\,(t_3 - t_2) = 24{,}49\,\mathrm{m/s} \cdot (63{,}70\,\mathrm{s} - 41{,}15\,\mathrm{s}) = 552{,}25\,\mathrm{m} \doteq 552{,}3\,\mathrm{m},$$
$$s_4 = v_4\,(t_4 - t_3) = 23{,}82\,\mathrm{m/s} \cdot (81{,}11\,\mathrm{s} - 63{,}70\,\mathrm{s}) = 414{,}71\,\mathrm{m} \doteq 414{,}7\,\mathrm{m}.$$

Pro celkovou délku trati vychází

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 156{,}4\,\mathrm{m} + 886{,}6\,\mathrm{m} + 552{,}3\,\mathrm{m} + 414{,}7\,\mathrm{m} = 2\,010\,\mathrm{m}.$$

Pro průměrnou rychlost během celého závodu dostáváme

$$v = \frac{s}{t_4} = \frac{2\,010\,\mathrm{m}}{81{,}11\,\mathrm{s}} = 24{,}781\,\mathrm{m/s} \doteq 24{,}78\,\mathrm{m/s} \doteq 89{,}21\,\mathrm{km/h}.$$ **5 bodů**

b) Změna polohové energie je dána vztahem

$$\Delta E_\mathrm{p} = (m + m_1)\,gh = (68\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 585\,\mathrm{m} = 447\,174\,\mathrm{J} \doteq 450\,\mathrm{kJ}.$$

1 bod

c) Pohybová energie na čtvrtém úseku vychází

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\,(m + m_1)\,v_\mathrm{k}^2 = \frac{1}{2} \cdot (68\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg}) \cdot (23{,}82\,\mathrm{m/s})^2 \doteq 22\,128\,\mathrm{J} \doteq 22\,\mathrm{kJ}.$$

Část polohové energie se přeměnila třením a odporem prostředí na vnitřní energii lyží a okolí. **2 body**

d) Ester Ledecká byla na celé trati o $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$ rychlejší. Průměrnou rychlostí v za tuto dobu ujede vzdálenost

$$d = v\Delta t = 24{,}78\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}01\,\mathrm{s} = 0{,}247\,8\,\mathrm{m} \doteq 25\,\mathrm{cm}.$$ **2 body**

Lze říci, že Ledecká porazila Veithovou přibližně o délku lyžařské boty.

Poznámka: Data o závodě byla převzata z `tn.nova.cz/zpravodajstvi/`.

FO63E2-2: Balení papíru

a) Obsah plochy jednoho listu papíru je

$$S = 0{,}297\,\mathrm{m} \cdot 0{,}21\,\mathrm{m} = 0{,}062\,370\,\mathrm{m}^2,$$

obsah plochy 100 listů papíru pak vychází

$$S_{100} = 100S = 100 \cdot 0{,}297\,\mathrm{m} \cdot 0{,}21\,\mathrm{m} = 6{,}237\,\mathrm{m}^2.$$

Gramáž je $\sigma = 135\,\mathrm{g/m^2} = 0{,}135\,\mathrm{kg/m^2}$, takže celková hmotnost balíku je

$$m_{100} = S_{100}\sigma = 6{,}237\,\mathrm{m^2} \cdot 135\,\mathrm{g/m^2} = 841{,}99\,\mathrm{g} \doteq 842\,\mathrm{g} = 0{,}842\,\mathrm{kg} \qquad \textbf{3 body}$$

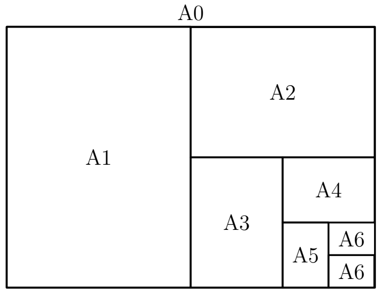
b) Hmotnost jednoho listu můžeme vypočítat dvěma způsoby, buď

$$m = S\sigma = 0{,}062\,37\,\mathrm{m^2} \cdot 135\,\mathrm{g/m^2} = 8{,}419\,9\,\mathrm{g} \doteq 8{,}42\,\mathrm{g},$$

nebo

$$m = \frac{m_{100}}{100} = \frac{841{,}99\,\mathrm{g}}{100} = 8{,}419\,9\,\mathrm{g} \doteq 8{,}42\,\mathrm{g}. \qquad \textbf{2 body}$$

c) Jestliže čtyřikrát přeložíme list papíru formátu A0, získáme list formátu A4 (obr. 1). Snadno dopočítáme rozměry listu papíru formátu A0 pak $a = 4 \cdot 210\,\mathrm{mm} = 840\,\mathrm{mm}$, $b = 4 \cdot 297\,\mathrm{mm} = 1\,188\,\mathrm{mm}$. **2 body**



Obr. 1.: Příklad náčrtu půlení papírů A0–A6 k řešení úlohy FO63E2-2

d) Objem V všech listů papíru v balíku o tloušťce $d = 22\,\mathrm{mm} = 0{,}022\,\mathrm{m}$ je $V = Sd$ a pro hustotu papíru dostáváme

$$\varrho = \frac{m_{100}}{V} = \frac{m_{100}}{Sd} = \frac{100S\sigma}{Sd} = \frac{100\sigma}{d} = \frac{100 \cdot 0{,}135\,\mathrm{kg/m^2}}{0{,}022\,\mathrm{m}} \doteq 613{,}64\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 614\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}614\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Tloušťka jednoho listu je:

$$d_1 = \frac{d}{100} = \frac{22{,}0\,\mathrm{mm}}{100} = 0{,}22\,\mathrm{mm} = 0{,}000\,22\,\mathrm{m}. \qquad \textbf{3 body}$$

FO63E2-3: Led v sudu

a) Objem ledu určíme jako objem válce o průměru $d = 60\,\mathrm{cm} = 0{,}6\,\mathrm{m}$ (poloměru $r = d/2 = 0{,}3\,\mathrm{m}$) a výšce $h = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ podle vztahu

$$V_\mathrm{l} = \pi r^2 h = \pi \cdot (0{,}3\,\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \doteq 0{,}056\,549\,\mathrm{m^3} \doteq 0{,}057\,\mathrm{m^3}.$$

Pomocí objemu a hustoty spočteme hmotnost ledu

$$m_\mathrm{l} = V_\mathrm{l}\varrho_\mathrm{l} = 0{,}056\,549\,\mathrm{m^3} \cdot 920\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 52{,}025\,\mathrm{kg} \doteq 52\,\mathrm{kg}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) K roztání ledu potřebujeme teplo $m_\mathrm{l} l_\mathrm{t}$, které získáme ochlazením vody o hmotnosti m_v z teploty $t_{90} = 90\,°\mathrm{C}$ na teplotu $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$. Platí proto rovnice

$$m_\mathrm{l} l_\mathrm{t} = m_\mathrm{v} c\,(t_{90} - t_0)\,,$$

z níž vyjádříme

$$m_\mathrm{v} = \frac{m_l l_\mathrm{t}}{c(t_{90} - t_0)} = \frac{330\,000\,\mathrm{J/kg} \cdot 52{,}025\,\mathrm{kg}}{4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot 90\,°\mathrm{C}} \doteq 45{,}418\,\mathrm{kg} \doteq 45\,\mathrm{kg}. \qquad \textbf{4 body}$$

Tato hmotnost odpovídá objemu 45 l vody.

c) Celkový objem vody v sudu je nyní

$$V_\mathrm{v} = \frac{(m_\mathrm{v} + m_\mathrm{l})}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{52{,}025\,\mathrm{kg} + 45{,}418\,\mathrm{kg}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}097\,443\,\mathrm{m^3} \doteq 98\,\text{litrů}.$$

Volné místo v sudu spočítáme jako rozdíl objemu sudu

$$V_\mathrm{s} = \pi r^2 v = \pi \cdot (0{,}3\,\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}9\,\mathrm{m} \doteq 0{,}254\,47\,\mathrm{m}^3 \doteq 0{,}25\,\mathrm{m}^3$$

a vody, tj.

$$V_\mathrm{p} = V_\mathrm{s} - V_\mathrm{v} = 0{,}254\,47\,\mathrm{m}^3 - 0{,}097\,443\,\mathrm{m}^3 \doteq 0{,}157\,03\,\mathrm{m}^3 \doteq 160\,\text{litrů}.$$ **3 body**

FO63E2-4: Třetí rezistor

a) Proud protékající za sebou zapojenými rezistory R_1 a R_2 vychází

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{9\,\mathrm{V}}{120\,\Omega + 150\,\Omega} = \frac{9}{270}\,\mathrm{A} = \frac{1}{30}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}033\,333\,\mathrm{A} \doteq 0{,}033\,\mathrm{A}.$$

2 body

b) Na větším odporu bude při stejném proudu větší napětí i větší výkon, stačí tedy zkontrolovat výkon rezistoru R_2

$$P_2 = R_2 I^2 = 150\,\Omega \cdot \left(\frac{1}{30}\,\mathrm{A}\right)^2 \doteq 0{,}166\,67\,\mathrm{W} \doteq 0{,}17\,\mathrm{W} < P_\mathrm{max}.$$

Martin rezistory takto do obvodu zapojit může. **2 body**

Poznámka: Pro úplnost doplňme i výkon prvního rezistoru

$$P_1 = R_1 I^2 = 120\,\Omega \cdot \left(\frac{1}{30}\,\mathrm{A}\right)^2 \doteq 0{,}133\,33\,\mathrm{W} \doteq 0{,}13\,\mathrm{W} < P_2 < P_\mathrm{max}.$$

c) Celkový odpor ve větvi s rezistory R_1 a R_2 bude (obr. 2a)

$$R_\mathrm{d} = R_1 + R_2 = 120\,\Omega + 150\,\Omega = 270\,\Omega.$$

Touto větví prochází stejný proud jako v části a), tj.

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{9\,\mathrm{V}}{120\,\Omega + 150\,\Omega} = \frac{9}{270}\,\mathrm{A} = \frac{1}{30}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}033\,333\,\mathrm{A} \doteq 0{,}033\,\mathrm{A}$$

a proto i výkony budou stejné jako v části b), tj.

$$P_1 = R_1 I^2 = 120\,\Omega \cdot \left(\frac{1}{30}\,\mathrm{A}\right)^2 \doteq 0{,}133\,33\,\mathrm{W} \doteq 0{,}13\,\mathrm{W}$$

$$P_2 = R_2 I^2 = 150\,\Omega \cdot \left(\frac{1}{30}\,\mathrm{A}\right)^2 \doteq 0{,}166\,67\,\mathrm{W} \doteq 0{,}17\,\mathrm{W}.$$

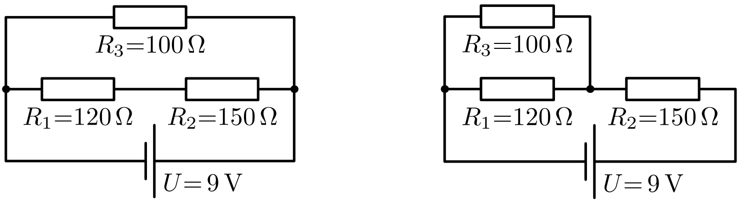
Napětí na rezistoru R_3 je $U = 9\,\mathrm{V}$ (při tomto napětí prochází proud $I_3 = U/R_3 = 9\,\mathrm{V}/100\,\Omega = 0{,}09\,\mathrm{mA}$, ale tento údaj není pro výpočet výkonu nutný). Výkon rezistoru pak vychází

$$P_3 = R_3 I_3^2 = \frac{U^2}{R_3} = \frac{(9\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} = 0{,}81\,\mathrm{W}.$$

Největší je výkon třetího rezistoru R_3 ($P_3 > P_2 > P_1$). **3 body**

Alternativní zdůvodnění úvahou: Protože velikosti odporů rezistorů jsou srovnatelné a výkon závisí na druhé mocnině napětí, je zřejmé, že největší výkon bude mít třetí rezistor, na kterém je největší napětí.

d) Paralelním připojením rezistoru R_3 k rezistoru R_1 (obr. 2b) bude celkový odpor obvodu



(a) (b)

Obr. 2: K řešení úlohy FO63E2-4

$$R_\mathrm{c} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 150\,\Omega + \frac{120\,\Omega \cdot 100\,\Omega}{120\,\Omega + 100\,\Omega} \doteq 204{,}54\,\Omega \doteq 200\,\Omega.$$

Celkový proud, který teče i rezistorem R_2 je

$$I_2 = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{204{,}54\,\Omega} \doteq 0{,}044\,001\,\mathrm{A} \doteq 44\,\mathrm{mA}.$$

Výkon druhého rezistoru vychází

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 150\,\Omega \cdot (0{,}044\,001\,\mathrm{A})^2 \doteq 0{,}290\,41\,\mathrm{W} \doteq 0{,}29\,\mathrm{W}.$$

Napětí na rezistoru R_2 je

$$U_2 = R_2 I_2 = 150\,\Omega \cdot 0{,}044\,01\,\mathrm{A} \doteq 6{,}600\,2\,\mathrm{V} \doteq 6{,}6\,\mathrm{V},$$

na prvním a třetím bude stejné napětí $U_1 = U - U_2 = 9\,\mathrm{V} - 6{,}600\,2\,\mathrm{V} \doteq 2{,}399\,8\,\mathrm{V} \doteq 2{,}4\,\mathrm{V}$. Výkony rezistorů pak vycházejí

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{(2{,}399\,8\,\mathrm{V})^2}{120\,\Omega} \doteq 0{,}047\,994\,\mathrm{W} \doteq 0{,}048\,\mathrm{W},$$

$$P_3 = \frac{U_1^2}{R_3} = \frac{(2{,}399\,8\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} \doteq 0{,}057\,593\,\mathrm{W} \doteq 0{,}058\,\mathrm{W}.$$

Největší výkon je na rezistoru R_2 ($P_2 > P_1 > P_3$). **3 body**

Alternativní zdůvodnění úvahou: Protože velikosti odporů jsou srovnatelné a výkon závisí na druhé mocnině proudu, je zřejmé, že největší výkon bude mít druhý rezistor, kterým prochází největší proud.