

Řešení úloh okresního kola 62. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2020/2021

Kategorie F

Autoři úloh: E. Konrád (4, FO SR), V. Koudelková (3), J. Thomas (2) a I. Volf (1)

FO62F2-1: Motocyklové závody

- a) V jarním závodě se okruh o délce $d = 4,40 \text{ km} = 4\,400 \text{ m}$ skládá z úseků stoupání $d_1 = 1\,200 \text{ m}$, rovinky $d_2 = 700 \text{ m}$, klesání $d_3 = 1\,800 \text{ m}$ a cílové rovinky o délce

$$d_4 = d - (d_1 + d_2 + d_3) = 4\,400 \text{ m} - (1\,200 \text{ m} + 700 \text{ m} + 1\,800 \text{ m}) = 700 \text{ m}.$$

Označme rychlosti na těchto úsecích $v_n = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$, $v_r = 126 \text{ km/h} = 35 \text{ m/s}$, $v_d = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$ a opět $v_r = 35 \text{ m/s}$. Celková doba, za kterou motocyklista projede jeden okruh při jarním závodě vychází

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{d_1}{v_n} + \frac{d_2}{v_r} + \frac{d_3}{v_d} + \frac{d_4}{v_r} = \frac{1\,200 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} + \frac{700 \text{ m}}{35 \text{ m/s}} + \frac{1\,800 \text{ m}}{40 \text{ m/s}} + \frac{700 \text{ m}}{35 \text{ m/s}} = \\ &= 40 \text{ s} + 20 \text{ s} + 45 \text{ s} + 20 \text{ s} = 125 \text{ s}. \end{aligned}$$

Podobně při podzimním závodě vychází na jedno kolo

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{d_4}{v_r} + \frac{d_3}{v_n} + \frac{d_2}{v_r} + \frac{d_1}{v_d} = \frac{700 \text{ m}}{35 \text{ m/s}} + \frac{1\,800 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} + \frac{700 \text{ m}}{35 \text{ m/s}} + \frac{1\,200 \text{ m}}{40 \text{ m/s}} = \\ &= 20 \text{ s} + 60 \text{ s} + 20 \text{ s} + 30 \text{ s} = 130 \text{ s}. \end{aligned}$$

5 bodů

- b) Průměrná rychlost pro jarní závod je

$$v_j = \frac{d}{t_j} = \frac{4\,400 \text{ m}}{125 \text{ s}} = 35,2 \text{ m/s}$$

neboli $126,72 \text{ km/h} \doteq 127 \text{ km/h}$, pro podzimní

$$v_p = \frac{d}{t_p} = \frac{4\,400 \text{ m}}{130 \text{ s}} \doteq 33,846 \text{ m/s} \doteq 33,8 \text{ m/s}$$

neboli $121,85 \text{ km/h} \doteq 122 \text{ km/h}$.

2 body

- c) Graf je na obr. 1. Jarnímu závodě odpovídá modrý, podzimnímu červený graf.

Vidíme, že se setkají ve třetím úseku v čase asi $68,5 \text{ s}$.

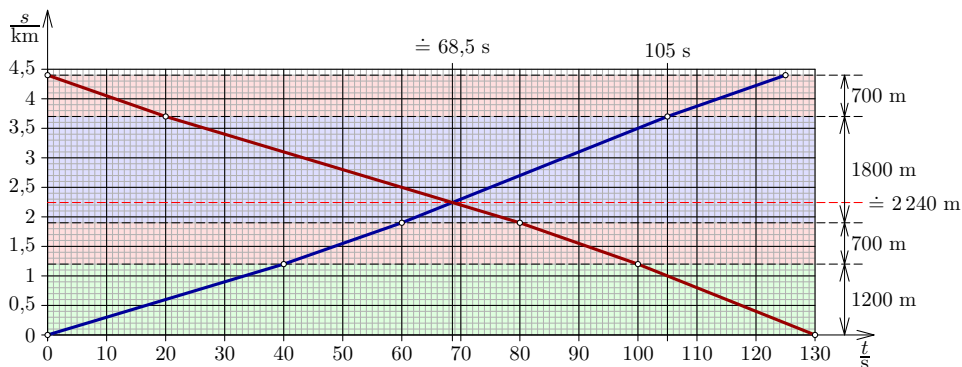
3 body

Poznámka: Vypočtená poloha ve vzdálenosti asi $2\,240 \text{ m}$ není po řešitelích vyžadována, v odhadu času doporučujeme toleranci mezi 60 s a 70 s , protože jde o odečítání z grafu. Tento interval odpovídá i odhadu přes součet průměrných rychlostí

$$t = \frac{d}{v_j + v_p} = \frac{4\,400 \text{ m}}{35,2 \text{ m/s} + 33,846 \text{ m/s}} \doteq 63,7 \text{ s},$$

který by odpovídal případu, že motocyklisté jedou konstantními rychlostmi.

Pokud je alespoň jeden z grafů správně, měla by být tato část ohodnocena alespoň jedním bodem.



Obr. 1: Graf k úloze FO62F2-1

FO62F2-2: Pokles vodní hladiny

- a) Při zavěšení ocelové krychličky na vzduchu siloměr ukáže tíhu krychličky F_G . Pro hustotu $\rho_o = 7,8 \text{ g/cm}^3 = 7800 \text{ kg/m}^3$ dostáváme

$$F_G = mg = \rho_o V g = \rho_o a^3 g = 7800 \text{ kg/m}^3 \cdot (0,04 \text{ m})^3 \cdot 9,8 \text{ N/kg} \doteq 4,8922 \text{ N} \doteq 4,9 \text{ N}.$$

2 body

- b) Po úplném ponoření krychličky do vody siloměr ukáže rozdíl síly tíhové a síly vztlačové dané hustotou vody ρ a objemem krychličky

$$F = F_G - F_{vz} = \rho_o a^3 g - \rho a^3 g = (\rho_o - \rho) a^3 g = (7800 \text{ kg/m}^3 - 1000 \text{ kg/m}^3) \cdot (0,04 \text{ m})^3 \cdot 9,8 \text{ N/kg} \doteq 4,2650 \text{ N} \doteq 4,3 \text{ N}.$$

2 body

- c) Při ponoření krychličky přeteče objem $V = a^3 = (4 \text{ cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$, bude tento objem v nádobě chybět. Protože plocha vodní hladiny je $S = d^2 = (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2$ a pro objem chybějící vody lze psát $V = Sh$, klesne hladina

$$h = \frac{V}{S} = \frac{64 \text{ cm}^3}{36 \text{ cm}^2} \doteq 1,7778 \text{ cm} \doteq 18 \text{ mm}.$$

2 body

- d) Stejně jako v části a) siloměr ukáže tíhu krychličky F_G . Pro hustotu $\rho_d = 0,75 \text{ g/cm}^3 = 750 \text{ kg/m}^3$ dostáváme

$$F_G = mg = \rho_d V g = \rho_d a^3 g = 750 \text{ kg/m}^3 \cdot (0,04 \text{ m})^3 \cdot 9,8 \text{ N/kg} \doteq 0,4704 \text{ N} \doteq 0,47 \text{ N}.$$

Hustota dřeva je menší než vody ($\rho_d < \rho$), po položení dřevěné krychličky na vodní hladinu siloměr ukáže nulovou výchylku, protože tíhová síla a vztlačová síla jsou v rovnováze.

2 body

- e) Objem vody, který přetekl, odpovídá objemu ponořené části krychličky V_1 , který odpovídá objemu vody o stejné hmotnosti jako dřevěná krychlička

$$\rho_d V = \rho V_1$$

odkud získáme

$$V_1 = V \frac{\rho_d}{\rho} = V \frac{0,75 \text{ g/cm}^3}{1,0 \text{ g/cm}^3} = \frac{3}{4} V = \frac{3}{4} \cdot 64 \text{ cm}^3 = 48 \text{ cm}^3.$$

Vodní hladina tedy poklesla

$$h_1 = \frac{V_1}{S} = \frac{48 \text{ cm}^3}{36 \text{ cm}^2} \doteq 1,333 \text{ cm} \doteq 13 \text{ mm}$$

neboli $3h/4$.

2 body

FO62F2-3: Slapská přehrada

- a) Do nádrže přitekla objem $V = 90\,000\,000 \text{ m}^3$ vody za čas $t = 2,5 \text{ dne} = 2,5 \cdot 24 \text{ h} = 2,5 \cdot 24 \cdot 3\,600 \text{ s} = 216\,000 \text{ s}$, tzn. průtok byl

$$Q_1 = \frac{90\,000\,000 \text{ m}^3}{216\,000 \text{ s}} \doteq 416,67 \text{ m}^3/\text{s} \doteq 420 \text{ m}^3/\text{s}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Za normálních podmínek je efektivní přítok $Q_2 = 120 \text{ m}^3/\text{s} - 40 \text{ m}^3/\text{s} = 80 \text{ m}^3/\text{s}$. Objem $V = 90\,000\,000 \text{ m}^3$ se tak naplní za čas

$$t_1 = \frac{V}{Q_2} = \frac{90\,000\,000 \text{ m}^3}{80 \text{ m}^3/\text{s}} = 1\,125\,000 \text{ s} = 13 \text{ dní } 0,5 \text{ h} \doteq 13 \text{ dní}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Celá nádrž o objemu $V_1 = 270\,000\,000 \text{ m}^3 = 3V$ se naplní za trojnásobnou dobu

$$t_2 = \frac{V_1}{Q_2} = \frac{270\,000\,000 \text{ m}^3}{80 \text{ m}^3/\text{s}} = 3\,375\,000 \text{ s} \doteq 39 \text{ dní } 1,5 \text{ h} \doteq 39 \text{ dní}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Pro dobu naplnění celé nádrže dostáváme

$$t_3 = \frac{V_1}{Q_3} = \frac{270\,000\,000 \text{ m}^3}{3\,300 \text{ m}^3/\text{s}} \doteq 81\,818 \text{ s} \doteq 23 \text{ h}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- d) Povodně v roce 2002 byly výrazně ničivější – průtok Vltavou Q_3 byl zhruba 8× větší než průtok Q_1 v roce 1954. **2 body**

Poznámka: Srovnání lze udělat i na základě doby, za jakou by se Slapy naplnily apod.

FO62F2-4: Výtah

- a) Označme počet techniků n . Pro vykonanou práci W platí $W = (nm + M)gH$, kde $H = 7h = 7 \cdot 3,5 \text{ m} = 24,5 \text{ m}$ je překonaná výška z 2. do 9. podlaží. Vyjádříme celkovou hmotnost osob ve výtahu

$$nm = \frac{W}{gH} - M = \frac{192\,000 \text{ J}}{9,8 \text{ N/kg} \cdot 24,5 \text{ m}} - 450 \text{ kg} \doteq 349,67 \text{ kg} \doteq 350 \text{ kg}.$$

To odpovídá počtu $5m = 5 \cdot 70 \text{ kg}$, v kabině se vezlo 5 techniků. **3 body**

- b) Pro užitečnou práci vychází

$$W_1 = nmgH = 5 \cdot 70 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 24,5 \text{ m} = 84\,035 \text{ J} \doteq 84 \text{ kJ} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Pro poměr W_1/W dostáváme

$$\frac{W_1}{W} = \frac{84 \text{ kJ}}{192 \text{ kJ}} \doteq 0,4375 \doteq 44 \%. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

c) Doba zkušební jízdy byla

$$t = \frac{H}{v} = \frac{24,5 \text{ m}}{0,70 \text{ m/s}} = 35 \text{ s} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

a pro výkon motoru platí

$$P = \frac{W}{t} = \frac{192\,000 \text{ J}}{35 \text{ s}} \doteq 5\,485,7 \text{ W} \doteq 5,5 \text{ kW}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

d) Při zvedání kabiny s jednou osobou vychází užitečná práce

$$W'_1 = mgH = 70 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 24,5 \text{ m} \doteq 16\,807 \text{ J} \doteq 17 \text{ kJ}$$

a celková práce

$$W' = (m + M)gH = (70 \text{ kg} + 450 \text{ kg}) \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 24,5 \text{ m} \doteq 124\,852 \text{ J} \doteq 120 \text{ kJ}.$$

Pro jejich poměr získáváme

$$\frac{W'_1}{W'} = \frac{16\,807 \text{ J}}{124\,852 \text{ J}} \doteq 0,13462 \doteq 13 \%. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Poznámka: V autorském řešení úlohy jsou výsledky v souladu s pravidly zaokrouhleny na 2 platné číslice, což odpovídá přesnosti hodnot v zadání. Řešitelům by mělo být tolerováno, pokud výsledky zaokrouhlí i na větší počet platných číslic (např. 3–5).