

## Řešení úloh celostátního kola 62. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli: J. Thomas (1, 3), J. Blažek (2) a J. Jírů (4)

1. a) Při zapnutí proudu se na cívce indukuje napětí, takže pro procházející proud platí:

$$I = \frac{U_e - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Označíme-li konečný proud  $I_0 = \frac{U_e}{R}$ , pak  $I_0 - I = \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}$ .

Napíšeme-li  $dI = -d(I_0 - I)$ , vychází

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Integrací této diferenciální rovnice obdržíme

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L}t + \ln C.$$

Integrační konstantu stanovíme z počátečních podmínek. Pro  $t = 0$  je  $I = 0$  a tedy  $\ln C = \ln I_0$ , takže platí

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}t \quad \text{neboli} \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

**3 body**

- b) Bez ohledu na celkovou indukčnost zapojení cívek má podíl  $\frac{R}{L}$  hodnotu řádově  $10^4$  až  $10^5 \text{ s}^{-1}$ . V čase 30 s po zapojení klíče bude tedy hodnota proudu již stálá a rovna hodnotě

$$I_0 = \frac{U_e}{R} = 45 \text{ mA}.$$

**2 body**

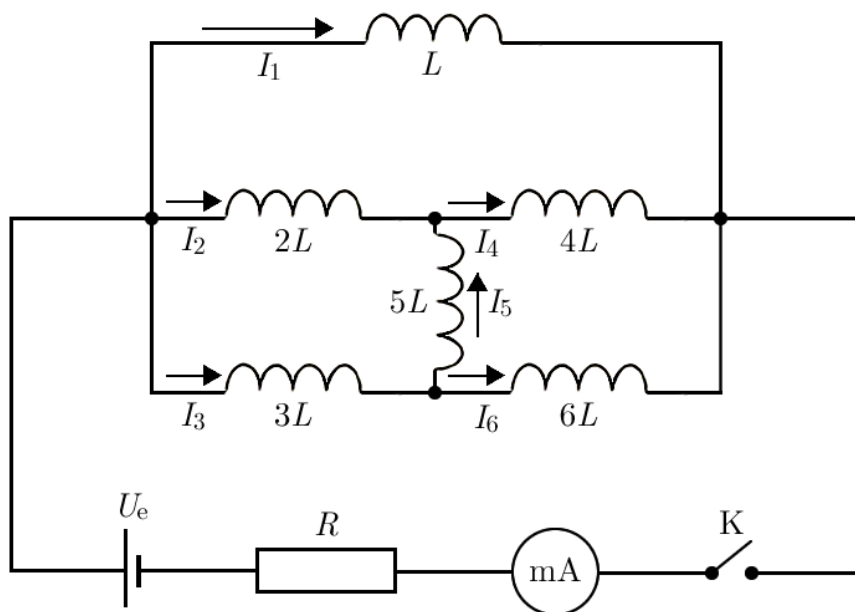
- c) Schéma překreslíme (viz obr. R1). Během přechodného děje do ustálení proudu část napětí připadá na rezistor a nenulový zbytek napětí bude mezi krajními body soustavy cívek. Toto napětí ( $U_e - RI_A$ ) je v každé větvi v daném okamžiku rovno součtu velikostí indukovaných napětí v této větvi. Mezi vnitřními uzly je vzhledem k symetrii obvodu napětí nulové, tedy velikost proudu  $I_5 = 0 \text{ A}$ . Časové přírůstky proudů a tím i proudy v každé větvi jsou nepřímo úměrné indukčnosti větve, proto

$$I_1 : I_2 : I_3 = 9 : \frac{3}{2} : 1; \quad I_2 = I_4; \quad I_3 = I_6.$$

Protože  $I_A = I_1 + I_2 + I_3 = 34,5 \text{ mA}$ , dostáváme po vyřešení soustavy rovnic

$$I_1 = 27 \text{ mA}, \quad I_2 = I_4 = 4,5 \text{ mA}, \quad I_3 = I_6 = 3 \text{ mA}, \quad I_5 = 0 \text{ mA}.$$

**5 bodů**



Obr. R1

*Alternativní řešení s využitím Kirchhoffových zákonů.*

Podle 1. Kirchhoffova zákona  $I_2 + I_5 = I_4$  a  $I_3 = I_5 + I_6$  a také  $I_A = I_1 + I_2 + I_3$ . Hodnotu 34,5 mA ukazuje miliampérmetr v době, kdy proud v obvodu není stálý a na cívkách se indukují napětí, které závisí na indukčnosti každé cívky.

Na každé cívce se při změně proudu indukují napětí  $U_i = -L \frac{dI}{dt}$ .

Zapišeme Kirchhoffovy zákony pro smyčky, které neobsahují zdroj:

$$-2L \frac{dI_2}{dt} + 5L \frac{dI_5}{dt} + 3L \frac{dI_3}{dt} = 0,$$

nebo

$$-2L \Delta I_2 + 5L \Delta I_5 + 3L \Delta I_3 = 0.$$

Protože počáteční proud je roven nule, můžeme napsat

$$-2I_2 + 5I_5 + 3I_3 = 0.$$

Analogicky můžeme napsat

$$-I_1 + 4I_4 + 2I_2 = 0,$$

$$-4I_4 - 5I_5 + 6I_6 = 0.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$I_1 = 27 \text{ mA}, \quad I_2 = I_4 = 4,5 \text{ mA}, \quad I_3 = I_6 = 3 \text{ mA}, \quad I_5 = 0 \text{ mA}.$$

2. a) Výpočet provedeme v soustavě, spojené s policejním autem. Druhý automobil se v této soustavě pohybuje rychlostí  $w = v - u$ . Uvažujme dvě po sobě jdoucí maxima signálu, vyslaná policejním radarem v okamžicích  $t = 0$  a  $t = T_0$ . První maximum dostihne sledované auto v čase  $t_1$ , určenému rovnicí  $ct_1 = d + wt_1$ , kde  $d$  je vzdálenost mezi automobily v okamžiku 0. Druhé maximum dorazí

v čase  $t_2$ , splňujícímu rovnici  $c(t_2 - T_0) = d + wt_2$ . Odečtením těchto rovnic dostáváme

$$c(t_2 - t_1) - cT_0 = w(t_2 - t_1).$$

Signál, dopadající na jedoucí auto, má periodu

$$T_1 = t_2 - t_1 = \frac{c}{c - w} T_0$$

a frekvenci

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \left(1 - \frac{w}{c}\right) f_0.$$

**3 body**

Při výpočtu frekvence  $f_2$  lze použít předchozí vztah s tím, že nyní je zdrojem signálu sledovaný automobil a policejní automobil je příjemcem:

$$f_2 = \left(1 - \frac{w}{c}\right) f_1 = \left(1 - \frac{w}{c}\right)^2 f_0 \approx \left(1 - 2\frac{w}{c}\right) f_0.$$

**3 body**

Relativní změna frekvence signálu, přijímaného policejním autem je tak

$$\frac{|f_0 - f_2|}{f_0} = 2\frac{|v - u|}{c}.$$

**1 bod**

b) Skládáme dvě kmitání o blízkých frekvencích a obecně různých amplitudách,

$$y_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t),$$

$$y_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi).$$

Vyjdeme z názorné představy skládání dvou fázorů  $\mathbf{A}_0$  a  $\mathbf{A}_2$ , rotujících s úhlovými rychlostmi  $\omega_0 = 2\pi f_0$  a  $\omega_2 = 2\pi f_2$ . Jelikož fázor  $\mathbf{A}_2$  rotuje vzhledem k fázoru  $\mathbf{A}_0$  úhlovou rychlostí  $\omega_r = |\omega_2 - \omega_0|$ , mění se výsledná amplituda  $A = |\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2|$  od maximální hodnoty  $A_0 + A_2$  do minimální hodnoty  $|A_0 - A_2|$  s frekvencí  $f_r = |f_0 - f_2|$ . Této frekvenci odpovídá perioda

$$T_r = \frac{1}{f_r} = \frac{c}{2|v - u|} \frac{1}{f_0}.$$

Číselně  $T_r = 3,6 \cdot 10^{-2}$  s.

**3 body**

*Poznámka:* Za předpokladu, že obě vlnění mají stejnou amplitudu  $A_0 = A_2$ , dostaneme ze součtového vzorce pro funkci kosinus výsledný signál ve tvaru

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}t - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Jde o harmonické kmity o frekvenci  $(\omega_0 + \omega_2)/2$ , modulované pomalu se měnící amplitudou

$$A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}t - \frac{\varphi}{2}\right) \right|,$$

Její perioda  $T_r$ , daná vztahem  $\left| \frac{\omega_0 - \omega_2}{2} \right| T_r = \pi$ , se shoduje s hodnotou, odvozenou z představy rotujících fázorů.

*Poznámky k hodnocení*

- a) Elektromagnetické záření ke svému šíření nepotřebuje žádné prostředí a ve všech soustavách se pohybuje toutéž rychlostí  $c$ . Nicméně při nerelativistickém odvození Dopplerova jevu budou řešitelé pravděpodobně vycházet z představy vlnění, šířícího se v nějakém prostředí. Získané vztahy pak budou záviset na volbě vztažené soustavy, spojené s daným „prostředím“. Avšak všechny takto vypočtené frekvence se musí v prvním řádu veličin  $u/c$  a  $v/c$  shodovat s relativistickým vzorcem pro Dopplerův jev, např.

$$f_1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{w}{c}}{1 + \frac{w}{c}}} f_0, \quad w = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}}.$$

- b) Opomine-li se při skládání vlnění o stejné amplitudě, že perioda rázů je periodou **absolutní** hodnoty funkce kosinus, vyjde její velikost dvojnásobná (frekvence rázů vyjde poloviční). Vztah pro frekvenci rázů nemusí být odvozován, řešitelé se mohou odvolat na obecně známý vzorec.

- 3.a) Označme úbytek teploty  $\Delta t$ . Z kalorimetrické rovnice

$$m_v c_v \Delta t = c_s m_s (t_v - \Delta t - t)$$

vyjádříme

$$\Delta t = \frac{c_s m_s (t_v - t)}{m_v c_v + c_s m_s}.$$

Podle směšovacího pravidla  $c(m_v + m_s) = m_v c_v + m_s c_s$ .

Protože  $w = \frac{m_s}{m_v + m_s}$ ,  $\frac{m_v}{m_v + m_s} = 1 - w$ , můžeme měrnou tepelnou kapacitu roztoku vyjádřit jako

$$c = c_v (1 - w) + c_s w = c_v - (c_v - c_s) w.$$

Závislost tepelné kapacity roztoku na jeho koncentraci je tedy lineární, směrnice přímky je

$$k = -(c_v - c_s) \Rightarrow -\frac{4\,200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} - 3\,360 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0,25} =$$

$$= -3\,360 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

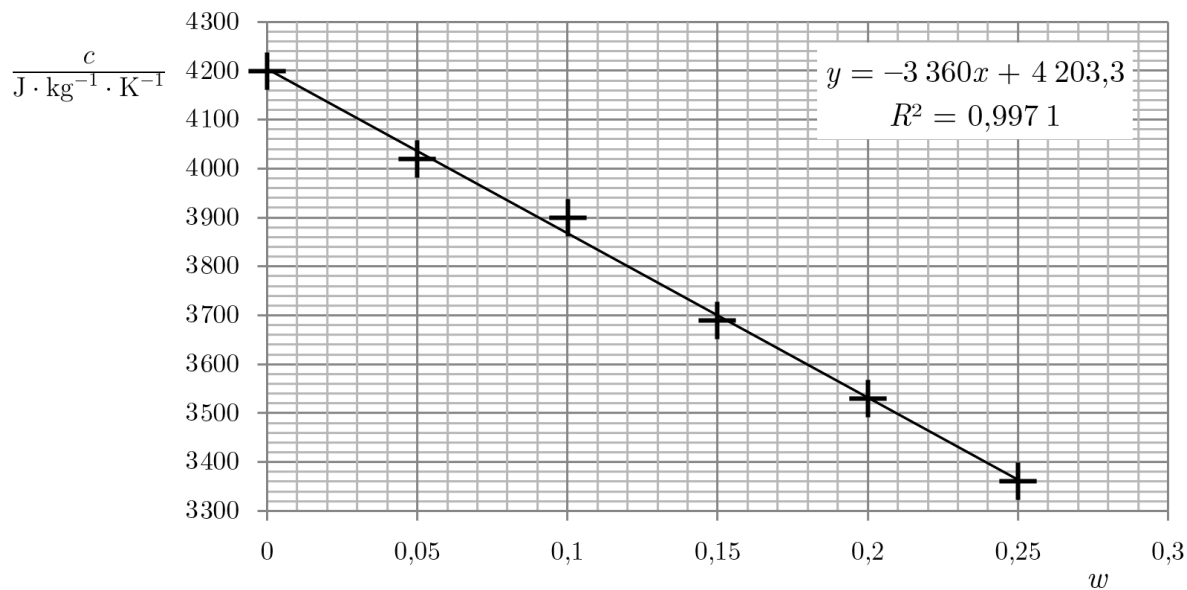
měrná tepelná kapacita čisté soli  $c_s = 840 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Teplota vody se tedy sníží o

$$\alpha) \Delta t_1 = \frac{c_s m_{s1} (t_v - t)}{m_v c_v + c_s m_{s1}} = 0,40 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$\beta) \Delta t_2 = \frac{c_s m_{s2} (t_v - t)}{m_v c_v + c_s m_{s2}} = 3,8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Pro ilustraci uvádíme parametry lineární regrese:



Obr. R2

**3 body**

- b) Závislost rozpouštěcího tepla soli na její hmotnosti v 1 kg vody je také přibližně lineární, můžeme tedy napsat

$$q = am_s + b,$$

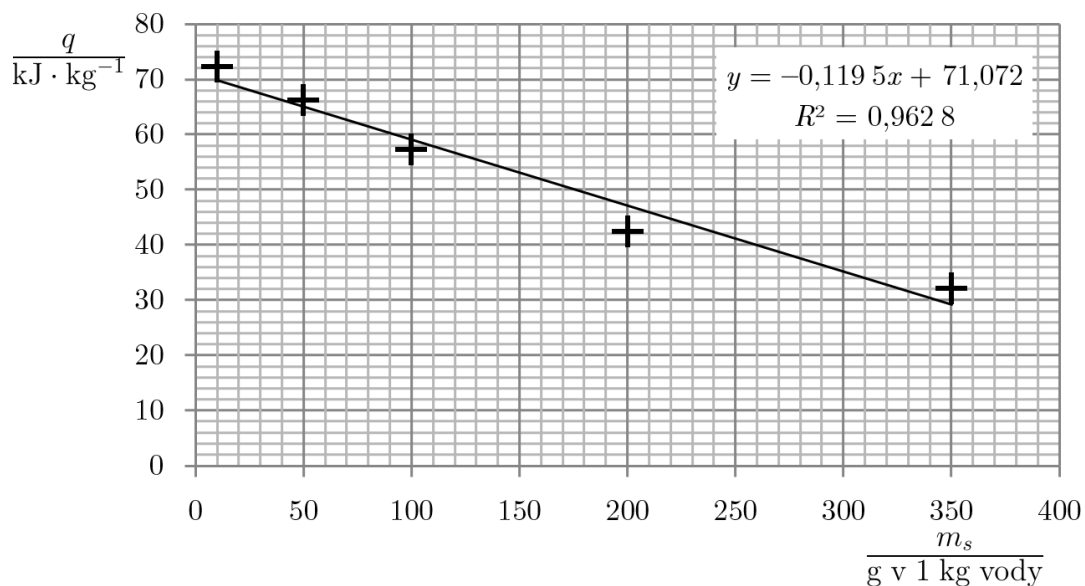
pro krajní meze intervalu (10; 350) dostaneme

$$72,3 = 10a + b,$$

$$32,2 = 350a + b.$$

Odtud  $a = -0,12 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{g}}$ ,  $b = 73,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

Pro ilustraci uvádíme přesné parametry lineární regrese:



Obr. R3

Pro  $m_{s1} = 25$  g dostaneme  $q_1 = 25a + b = 70,5$  kJ/kg,

pro  $m_{s2} = 250$  g dostaneme  $q_2 = 250a + b = 44$  kJ/kg.

Na rozpuštění soli je potřeba teplo  $qm_s$ . Z kalorimetrické rovnice

$$qm_s = (m_v c_v + c_s m_s) \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{qm_s}{(m_v c_v + c_s m_s)}.$$

Snížení teploty pro  $m_{s1} = 25$  g  $\Delta t_1 = 0,40$  °C.

Snížení teploty pro  $m_{s2} = 250$  g  $\Delta t_2 = 2,5$  °C.

**3 body**

c) Upravíme vztah pro koncentraci

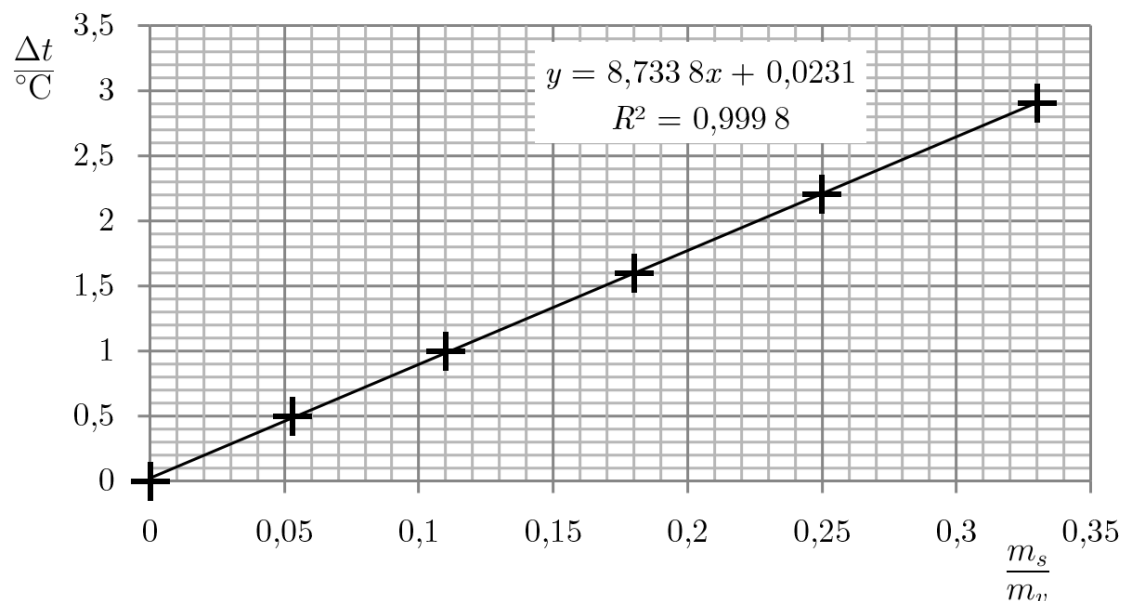
$$w = \frac{m_s}{m_v + m_s} = \frac{1}{1 + \frac{m_v}{m_s}} \Rightarrow \frac{m_s}{m_v} = \frac{w}{1 - w}.$$

Doplníme tabulku závislosti bodu varu na koncentraci soli:

$\frac{w}{\%}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{m_s}{m_v}$	0	0,053	0,11	0,18	0,25	0,33
$\frac{t_v}{^\circ\text{C}}$	100	100,5	101,0	101,6	102,2	102,9
$\frac{\Delta t}{^\circ\text{C}}$	0	0,5	1,0	1,6	2,2	2,9

Podle předpokladu jde o lineární závislost  $\Delta t = k \frac{m_s}{m_v}$ , tedy  $k = \frac{\Delta t}{\frac{m_s}{m_v}} = 8,7$  °C.

Hodnoty konstanty  $k$  můžeme opět porovnat s přesnými parametry lineární regrese:



Obr. R4

Pro  $m_{s1} = 25$  g je  $\Delta t_1 = k \frac{m_{s1}}{m_v} = 0,22$  °C, pro  $m_{s2} = 250$  g je  $\Delta t_2 = k \frac{m_{s2}}{m_v} = 2,2$  °C.

**2 body**

- d) Roztok budeme muset ještě ohřát o  $\Delta t_1 = (0,42 + 0,4 + 0,22)^\circ\text{C} = 1^\circ\text{C}$  při přidání 25 g soli nebo o  $\Delta t_2 = (3,8 + 2,5 + 2,2)^\circ\text{C} = 8,5^\circ\text{C}$  při přidání 250 g soli. K tomu bude třeba ještě zahřívát po dobu  $\tau_1 = \frac{360\text{ s}}{80^\circ\text{C}} \cdot 1^\circ\text{C} = 4,5\text{ s}$  při přidání 25 g soli nebo  $\tau_2 = \frac{360\text{ s}}{80^\circ\text{C}} \cdot 8,5^\circ\text{C} = 38,3\text{ s}$  při přidání 250 g soli.

**2 body**

4. a) Užijeme

$$\begin{aligned} dx &= v dt, \\ U_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -v \cdot \frac{d\Phi}{dx}, \\ I &= \frac{1}{R} U_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi}{dx}. \end{aligned} \quad (1)$$

V první fázi pro  $x \in \langle 0; a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2} B(x) S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3a} B_0 \cdot ax = \frac{B_0}{6} x^2.$$

Faktor  $\frac{1}{2}$  vychází z toho, že díky linearitě použijeme průměrnou hodnotu indukce  $B$ .

V druhé fázi pro  $x \in \langle a; 3a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x}{3a} B_0 + \frac{x-a}{3a} B_0 \right) \cdot a^2 = \frac{B_0}{6} a (2x - a).$$

V třetí fázi pro  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$  je indukční tok procházející rámečkem

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( B_0 + \frac{x-a}{3a} B_0 \right) \cdot a (4a - x) = \frac{B_0}{6} (-x^2 + 2ax + 8a^2).$$

Podle vztahu (1) dostaneme v jednotlivých fázích proudy

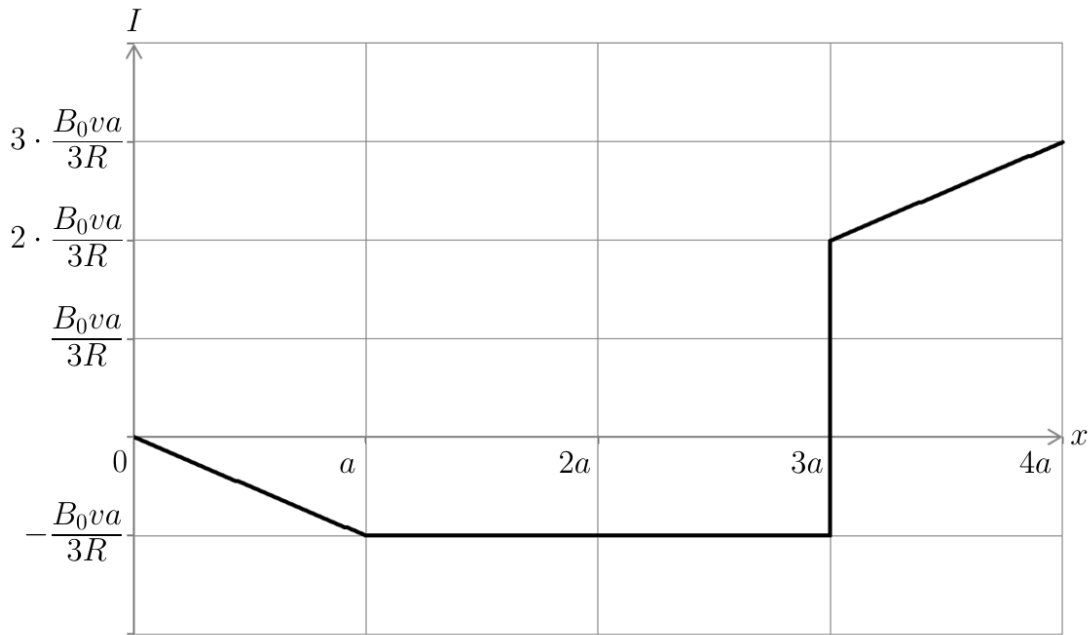
$$I_1 = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi_1(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \cdot \frac{B_0}{6} \frac{d}{dx} x^2 = -\frac{B_0 v}{3R} x,$$

$$I_2 = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi_2(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \cdot \frac{B_0}{6} a \frac{d}{dx} (2x - a) = -\frac{B_0 v}{3R} a = \text{konst.},$$

$$I_3 = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi_3(x)}{dx} = -\frac{v}{R} \cdot \frac{B_0}{6} \frac{d}{dx} (-x^2 + 2ax + 8a^2) = \frac{B_0 v}{3R} (x - a).$$

V první a druhé fázi je proud záporný, protože indukční tok procházející rámečkem roste, ve třetí fázi je proud kladný, protože indukční tok klesá.

**4 body**



Obr. R5

*Alternativní řešení:* Při přechodu pravého vodiče magnetickým polem, tj. pro  $x \in \langle 0; 3a \rangle$  se mezi jeho konci indukuje napětí, které způsobuje proud

$$I'(x) = \frac{U'(x)}{R} = \frac{B(x)av}{R} = \frac{\frac{x}{3a}B_0av}{R} = \frac{B_0v}{3R}x.$$

Obdobně při přechodu levého vodiče, tj. pro  $x \in \langle a; 4a \rangle$ , se mezi jeho konci indukuje napětí, které způsobuje proud

$$I''(x) = \frac{U''(x)}{R} = \frac{B(x)av}{R} = \frac{\frac{x-a}{3a}B_0av}{R} = \frac{B_0v}{3R}(x-a).$$

V první fázi, kdy  $x \in \langle 0; a \rangle$ , vzniká napětí pouze na pravém vodiči, čímž rámečkem protéká proud

$$I_1(x) = I'(x) = \frac{B_0v}{3R}x.$$

V druhé fázi, kdy  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$ , se celý rámeček nachází v magnetickém poli, přitom se v levém a v pravém vodiči indukuje napětí s navzájem opačnou orientací. Rámečkem protéká proud

$$I_2 = I'(x) - I''(x) = \frac{B_0v}{3R}a = \text{konst.}$$

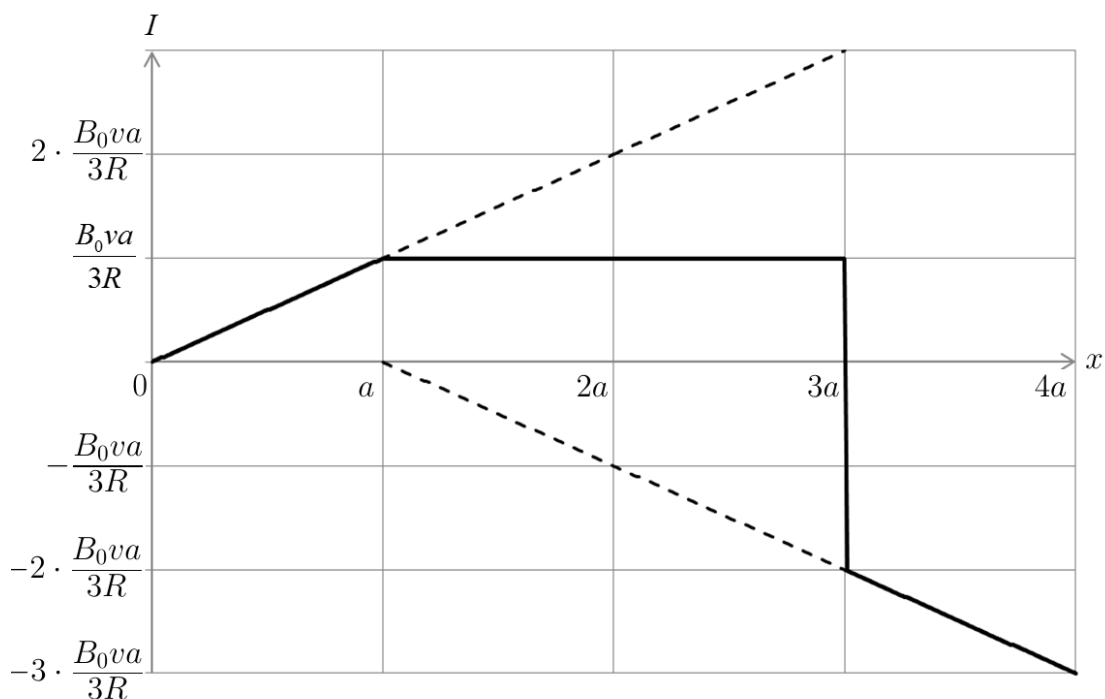
V třetí fázi, kdy  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$ , vzniká napětí pouze na levém vodiči, čímž protéká proud

$$I_3(x) = -I''(x) = -\frac{B_0v}{3R}(x-a).$$

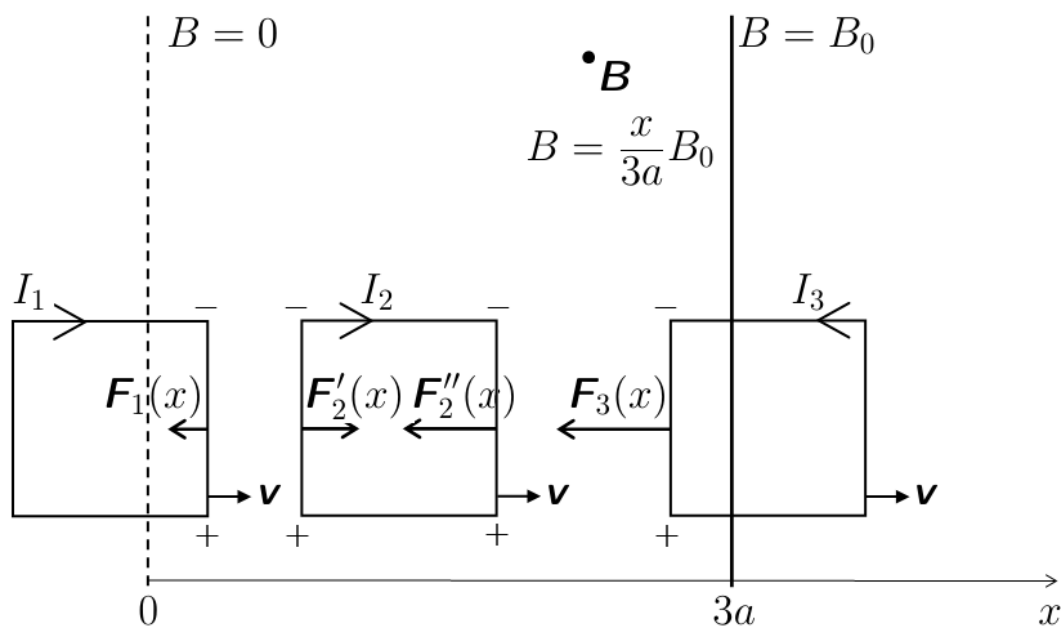
Proudy vyšly s navzájem opačným znaménkem než ve výše uvedeném řešení z důvodu volby prvního proudu jako proudu kladného (při této volbě vyjde graf převrácený kolem osy  $x$ ).

*Při hodnocení je pořadí kladného a záporného proudu osobní volbou řešitele, ale dva navzájem různé směry proudu je nutné v řešení odlišit.*





Obr. R6



Obr. R7

- b) V první fázi pro  $x \in \langle 0; a \rangle$  působí na pravý vodič, a tedy na rámeček, magnetická síla o velikosti

$$F_1(x) = B(x) I_1(x) a = \frac{x}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} x \cdot a = \frac{B_0^2 v}{9R} x^2.$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_1 = \int_0^a F_1(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \int_0^a x^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{B_0^2 v}{27R} a^3.$$

V druhé fázi pro  $x \in \langle a; 3a \rangle$  působí na rámeček výsledná magnetická síla o ve-

likosti

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F_2'(x) - F_2''(x) = B'(x) I_2 a - B''(x) I_2 a = \\ &= \frac{x}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} a \cdot a - \frac{x-a}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} a \cdot a = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 = \text{konst.} \end{aligned}$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$W_2 = \int_a^{3a} F_2(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 \int_a^{3a} dx = \frac{B_0^2 v}{9R} a^2 [x]_a^{3a} = \frac{2B_0^2 v}{9R} a^3$$

nebo vzhledem ke konstantní síle přímo

$$W_2 = F_2 \cdot 2a = \frac{6B_0^2 v}{27R} a^3.$$

Ve třetí fázi pro  $x \in \langle 3a; 4a \rangle$  působí na levý vodič, a tedy na rámeček, magnetická síla o velikosti

$$F_3(x) = B(x) I_3(x) a = \frac{x-a}{3a} B_0 \cdot \frac{B_0 v}{3R} (x-a) \cdot a = \frac{B_0^2 v}{9R} (x-a)^2.$$

Práce stejně velké vnější síly opačného směru je

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{3a}^{4a} F_3(x) dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \int_{3a}^{4a} (x^2 - 2ax + a^2) dx = \\ &= \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2 x \right]_{3a}^{4a} = \frac{19B_0^2 v}{27R} a^3. \end{aligned}$$

Celková práce vykonaná vnější silou je  $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{26B_0^2 v}{27R} a^3$ .

**4 body**

*Alternativní řešení:* Práce vykonaná vnější silou je rovna přírůstku vnitřní energie smyčky, která se průchodem proudu zahřívá. Využijeme integrál

$$W = \int P dt = \int RI^2 dt = \frac{R}{v} \int I^2 dx.$$

V jednotlivých fázích je práce

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{R}{v} \int_0^a I_1^2 dx = \frac{R}{v} \cdot \frac{B_0^2 v^2}{9R^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{B_0^2 v}{27R} a^3, \\ W_2 &= RI_2^2 t = RI_2^2 \cdot \frac{2a}{v} = R \cdot \frac{B_0^2 v^2 a^2}{9R^2} \cdot \frac{2a}{v} = \frac{6B_0^2 v}{27R} a^3, \\ W_3 &= \frac{R}{v} \int_{3a}^{4a} I_3^2 dx = \frac{R}{v} \cdot \frac{B_0^2}{9R^2} \int_{3a}^{4a} (x-a)^2 dx = \frac{B_0^2 v}{9R} \left[ \frac{(x-a)^3}{3} \right]_{3a}^{4a} = \frac{19B_0^2 v}{27R} a^3. \end{aligned}$$

Celková práce vykonaná vnější silou je  $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{26B_0^2 v}{27R} a^3$ .

- c) Využijeme graf získaný v části a) a obsah plochy mezi tímto grafem a osou  $x$ . Během první a druhé fáze teče proud jedním směrem, během třetí fáze teče proud opačně. Uvažovaná plocha pro první a druhou fázi má stejnou velikost jako plocha pro třetí fázi.

Označme  $T = \frac{a}{v}$  dobu, za kterou se rámeček posune o délku  $a$ . Jednotkovému obsahu plochy  $I_2 a$  odpovídá náboj  $\Delta Q$ , pro který platí

$$I_2 a = \frac{\Delta Q}{T} a = \Delta Q \frac{a}{T} = \Delta Q v.$$

Celkový obsah plochy je  $\frac{5}{2} I_2 a$  a celkový náboj

$$Q = \frac{5}{2} \Delta Q = \frac{5 B_0 a^2}{6 R}.$$

Tento náboj projde v první a druhé fázi jedním směrem a ve třetí fázi opačným směrem. **2 body**

*Alternativní řešení:* Užijeme integrály

$$Q_1 = \int_0^a I_1(x) dt = \int_0^a \frac{B_0 v}{3R} x \cdot \frac{dx}{v} = \left[ \frac{B_0}{6R} x^2 \right]_0^a = \frac{B_0 a^2}{6R},$$

$$Q_2 = I_2 \cdot \frac{2a}{v} = \frac{B_0 v a}{3R} \cdot \frac{2a}{v} = \frac{2 B_0 a^2}{3R},$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{5 B_0 a^2}{6R},$$

$$Q = Q_3 = \int_{3a}^{4a} I_3(x) dt = \int_{3a}^{4a} \frac{B_0 v}{3R} (x - a) \cdot \frac{dx}{v} = \left[ \frac{B_0}{3R} \left( \frac{x^2}{2} - ax \right) \right]_{3a}^{4a} = \frac{5 B_0 a^2}{6R}.$$