

Řešení úloh 1. kola 62. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Úlohy navrhli: J. Thomas (1, 2, 3, 5), J. Jírů (4, 7) a J. Kříž (6)

1. Při malé rychlosti otáčení jsou tělesa v klidu a na těleso o hmotnosti m působí pouze setrvačná odstředivá síla a tah niti T , které jsou v rovnováze. Platí tedy

$$T = m\omega^2(r + l). \quad (1)$$

Na těleso hmotnosti M působí rovněž setrvačná odstředivá síla a tah niti T , které jsou v rovnováze se silou tření. Můžeme napsat

$$fMg - T = M\omega^2r. \quad (2)$$

Nemá-li těleso prokluzovat, musí být splněna podmínka

$$M\omega^2r + T = M\omega^2r + m\omega^2(r + l) < fMg,$$

úhlová frekvence tedy musí být

$$\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{fMg}{m(r + l) + Mr}}.$$

4 body

Při $\omega > \omega_0$ už síla tření neudrží tělesa vzhledem k tyči v klidu. Pro tělesa musíme napsat pohybové rovnice

$$ma = m\omega^2(r + l) - T,$$

$$Ma = M\omega^2r + T - fMg.$$

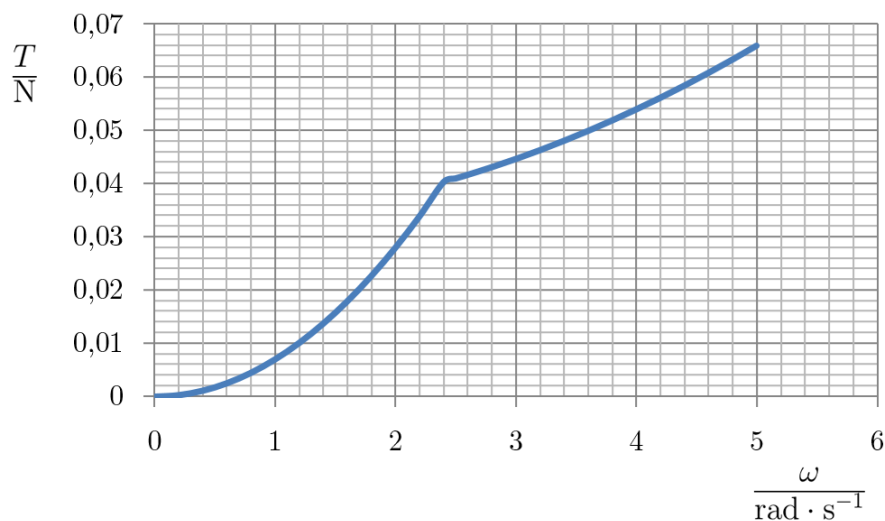
Jejich řešením dostaneme

$$T = \frac{Mm(\omega^2l + fg)}{m + M}.$$

4 body

Sestrojíme graf závislosti velikosti síly napínající nit T na úhlové frekvenci otáčení ω :

$\frac{\omega}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$\frac{T}{\text{N}}$	0	0,0003	0,0011	0,0025	0,0045	0,007	0,010	0,014	0,018
$\frac{\omega}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$	1,8	2,0	2,2	2,4	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2
$\frac{T}{\text{N}}$	0,023	0,028	0,034	0,040	0,041	0,042	0,043	0,045	0,046
$\frac{\omega}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
$\frac{T}{\text{N}}$	0,048	0,050	0,052	0,054	0,056	0,059	0,061	0,063	0,066



Obr. R1

2 body

2.a) Pro souřadnice granátu před výbuchem platí:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Doba letu granátu v případě, že by k výbuchu nedošlo, by byla

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 90 \text{ s.}$$

To znamená, že granát bude v době t_0 ještě v první fázi letu. Vzdálenost místa výbuchu od místa výstřelu je $\sqrt{x^2 + y^2}$; zvuk dospěje do místa výstřelu za dobu

$$\Delta t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_z} = \frac{\sqrt{(v_0 t_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2)^2}}{v_z} = 48 \text{ s.}$$

2 body

b) Z rovnic (1) a (2) po dosazení za čas t_0 dostaneme

$$x_0 = v_0 t_0 \cos \alpha = 13 \cdot 10^3 \text{ m}$$

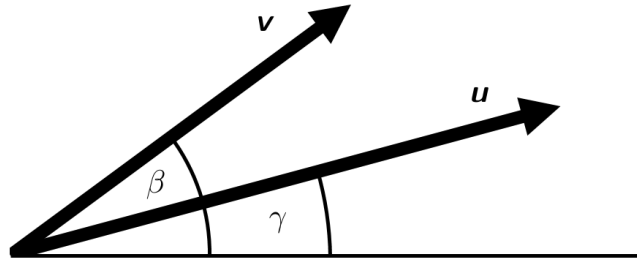
$$y_0 = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 = 8,7 \cdot 10^3 \text{ m.}$$

2 body

c) Rychlost pohybu každého hraničního úlomku si můžeme představit jako výslednici rychlosti granátu \mathbf{v} a rychlosti úlomku \mathbf{u} vzhledem ke granátu, která svírá s vodorovnou rovinou úhel γ (obr. R2). Souřadnice úlomku po době τ budou

$$x = x_0 + (v_x + u \cos \gamma) \tau,$$

$$y = y_0 + (v_y + u \sin \gamma) \tau - \frac{1}{2} g \tau^2,$$



Obr. R2

po dosazení souřadnic a složek rychlosti granátu

$$x = v_0 t_0 \cos \alpha + (v_0 \cos \alpha + u \cos \gamma) \tau,$$

$$y = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 + (v_0 \sin \alpha - g t_0 + u \sin \gamma) \tau - \frac{1}{2} g \tau^2.$$

Po úpravě dostaneme

$$x = v_0 \cos \alpha (t_0 + \tau) + u \tau \cos \gamma,$$

$$y = v_0 \sin \alpha (t_0 + \tau) - \frac{1}{2} g (t_0^2 + 2\tau t_0 + \tau^2) + u \tau \sin \gamma =$$

$$= v_0 \sin \alpha (t_0 + \tau) - \frac{1}{2} g (t_0 + \tau)^2 + u \tau \sin \gamma.$$

Z rovnic vidíme, že pohyb mračna úlomků si můžeme představit jako pohyb složený z pohybu jejich těžiště po stejné parabole, po které by se pohyboval granát, popsany rovnicemi (1) a (2), a z rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí velikosti u všemi směry.

Proto bude mít mračno úlomků tvar koule o poloměru $R = u\tau$. V čase τ_1 po výbuchu se bude těžiště mračna nacházet v místě o souřadnicích

$$x = v_0 \cos \alpha (t_0 + \tau_1) = 22 \text{ km},$$

$$y = v_0 \sin \alpha (t_0 + \tau_1) - \frac{1}{2} g (t_0 + \tau_1)^2 = 9,7 \text{ km}.$$

Poloměr mračna v té době bude $R = u\tau_1 = 24 \text{ km}$.

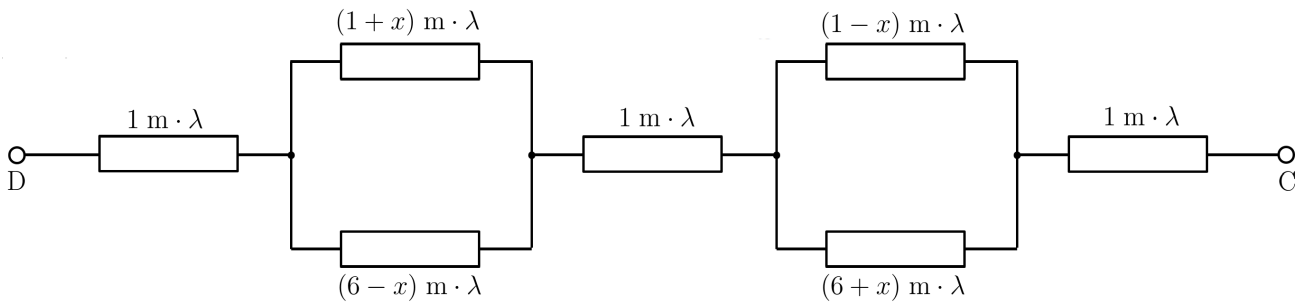
Větší část mračna úlomků tedy bude ještě ve vzduchu a bude mít tvar části koule o poloměru 24 km, jejíž střed leží ve výšce 9,7 km nad vodorovnou rovinou. Určíme objem kulového vrchlíku o výšce $v = R - y = 14,3 \text{ km}$ a poloměru $r_1 = \sqrt{R^2 - y^2} = 22 \text{ km}$. Objem vrchlíku $V_1 = \frac{1}{6} \pi v (3r_1^2 + v^2) = 12\,400 \text{ km}^3$, objem koule $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 58\,000 \text{ km}^3$; ve vzduchu je tedy ještě 79 % úlomků.

4 body

- d) Doba $(t_0 + \tau_2) = 90 \text{ s}$ odpovídá době dopadu granátu na vodorovnou rovinu. „Mračno“ tedy bude mít tvar polokoule a ve vzduchu bude ještě polovina úlomků. Proto $m_1 = \frac{m}{2} = 300 \text{ kg}$.

2 body

Od třetí do šesté sekundy se odpor zapojení mění; náhradní schéma bychom mohli nakreslit takto:



Obr. R6

Celkový odpor závisí na vzdálenosti x :

$$R(x) = \lambda \cdot 1 \text{ m} + \lambda \frac{(1+x)(6-x)}{7} \text{ m} + \lambda \cdot 1 \text{ m} + \lambda \frac{(1-x)(6+x)}{7} \text{ m} + \lambda \cdot 1 \text{ m} =$$

$$= \lambda \left[3 + \frac{10 + 2 \cdot (1-x^2)}{7} \right] \text{ m} = 31 \Omega + 2(1-x^2) \Omega.$$

Závislost odporu na čase má tedy tvar paraboly. Protože se příčka pohybuje rychlostí o velikosti $v = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a start začíná na souřadnici $x = -2 \text{ m}$, můžeme pro závislost souřadnice na čase napsat $x = -2 + 0,5t$.

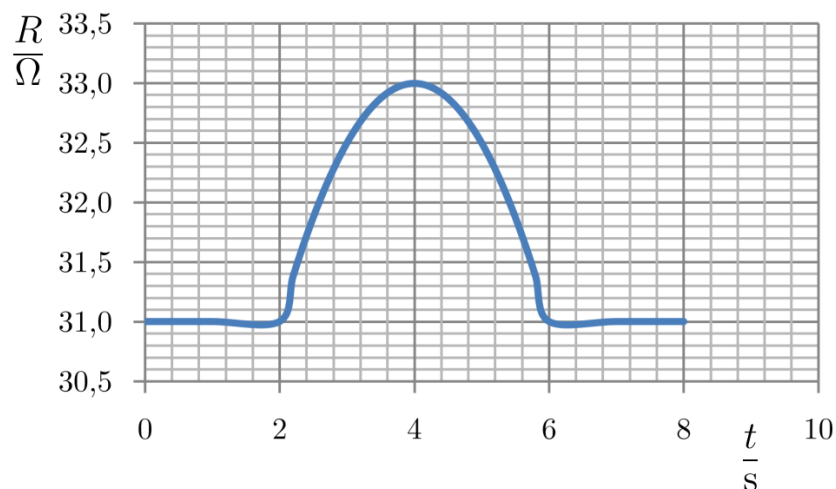
Při $t \leq 2 \text{ s}$ nebo $t \geq 6 \text{ s}$ je $R_0 = 31 \Omega$, pro $2 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$ pak

$$R = 31 + 2 [1 - (4 - 2t + 0,25t^2)] = 31 + 2 - 8 + 4t - 0,5t^2 = 25 + 4t - 0,5t^2.$$

Minimální hodnota odporu je tedy $R_0 = 31 \Omega$.

3 body

Sestrojíme graf závislosti odporu na čase:



Obr. R7

Z grafu odečteme, že odpor je maximální v čase $t = 4 \text{ s}$ a má hodnotu $R = 33 \Omega$.

3 body

- 4.a) Náboj horního kondenzátoru se po sepnutí spínače S1 rozdělil na horní a prostřední kondenzátor s napětím U :

$$C_1 U_1 = C_1 U + C U.$$

Po rozepnutí spínače S1 a sepnutí spínače S2 se nový náboj na prostředním kondenzátoru rozdělil na prostřední a dolní kondenzátor:

$$C U = C_2 U_2 + C U_2.$$

Z rovnic plyne

$$U = \frac{C_1}{C + C_1} U_1,$$
$$U_2 = \frac{C}{C + C_2} U = \frac{C C_1}{(C + C_1)(C + C_2)} U_1. \quad (1)$$

2 body

- b) Derivujeme konečné napětí dané vztahem (1) podle kapacity C :

$$\frac{dU_2}{dC} = \frac{C_1 (C_1 C_2 - C^2)}{(C + C_1)^2 (C + C_2)^2} U_1.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$C = \sqrt{C_1 C_2},$$

což je geometrický průměr kapacit C_1 a C_2 .

Pro $C < \sqrt{C_1 C_2}$ je derivace kladná a funkce je rostoucí, pro $C > \sqrt{C_1 C_2}$ je derivace záporná a funkce je klesající, proto je nalezený extrém maximem.

Dosazením do vztahu (1) a po úpravě dostaneme

$$U_{2\max} = \frac{C_1}{(\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2})^2} U_1.$$

4 body

- c) Postupem podle úlohy a) nebo z jejího výsledku dostaneme

$$U = \frac{1}{3} U_1, \quad U_2 = \frac{2}{5} U = \frac{2}{15} U_1.$$

Horní kondenzátor má počáteční energii

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2$$

a konečnou energii

$$E'_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2} C_1 \cdot \frac{1}{9} U_1^2 = \frac{1}{9} E_1.$$

Konečná energie prostředního a dolního kondenzátoru je

$$E' = \frac{1}{2} \cdot 2C_1 \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2C_1 \cdot \frac{4}{225} U_1^2 = \frac{8}{225} E_1,$$

$$E'_2 = \frac{1}{2} \cdot 3C_1 \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3C_1 \cdot \frac{4}{225} U_1^2 = \frac{12}{225} E_1.$$

Přírůstek vnitřní energie je roven úbytku elektrické energie soustavy

$$\Delta E = E_1 - E'_1 - E' - E'_2 = \frac{4}{5} E_1,$$

tedy na vnitřní energii se během celého děje přemění 80 % původní elektrické energie soustavy. **4 body**

- 5.a) Označme délku tyčinky l a délku jejího obrazu L , přičemž $l \ll a_1$ a $L \ll a'_1$. Podle zobrazovací rovnice pro vzdálenější konec tyčinky platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f}, \quad (1)$$

pro bližší konec tyčinky pak

$$\frac{1}{a_1 - l} + \frac{1}{a'_1 + L} = \frac{1}{f} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{1 - \frac{l}{a_1}} + \frac{1}{a'_1} \frac{1}{1 + \frac{L}{a'_1}}.$$

Protože $\frac{1}{1 - \frac{l}{a_1}} \approx 1 + \frac{l}{a_1}$ a $\frac{1}{1 + \frac{L}{a'_1}} \approx 1 - \frac{L}{a'_1}$, můžeme napsat

$$\frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{l}{a_1}\right) + \frac{1}{a'_1} \left(1 - \frac{L}{a'_1}\right) \approx \frac{1}{f}. \quad (2)$$

Odečtením rovnic (2) a (1) dostaneme

$$\frac{l}{a_1^2} - \frac{L}{a_1'^2} \approx 0.$$

Odtud $k = \frac{L}{l} = \left(\frac{a'_1}{a_1}\right)^2$ a $a'_1 = a_1 \sqrt{k}$.

Dosazením do rovnice (1) pak

$$f = \frac{a_1 \sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = 15 \text{ cm.}$$

5 bodů

- b) Při nových vzdálenostech $a_2 = a_1 + \Delta a$ a $a'_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f}$ a nové délce obrazu L_1 bude nyní pro zvětšení platit:

$$k_1 = \frac{L_1}{l} = \left(\frac{a'_2}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{f}{a_2 - f}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_1\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}}{a_1 + \Delta a - \frac{a_1\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a_1\sqrt{k}}{(a_1 + \Delta a)(\sqrt{k} + 1) - a_1\sqrt{k}}\right)^2.$$

Vztah mezi velikostmi obrazů tyčinky

$$n = \frac{L_1}{L} = \frac{k_1}{k} = \left(\frac{a_1}{(a_1 + \Delta a)(\sqrt{k} + 1) - a_1\sqrt{k}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{\Delta a}{a_1}\right)(\sqrt{k} + 1) - \sqrt{k}\right]^2} = \frac{1}{4}.$$

Délka obrazu tyčinky se tedy zmenší 4krát.

5 bodů

- 6.a) Do lahve jsme postupně přilévali vždy 80 ml vody. Naměřili jsme následující hodnoty:

V / ml	0	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	880	960
f_1 / Hz	140	139	151	161	176	191	201	210	240	271	313	450	817
f_2 / Hz	136	141	150	163	172	191	198	227	239	279	295	481	815
f_3 / Hz	132	142	153	163	174	188	198	228	238	261	301	424	775
f_4 / Hz	138	142	152	160	175	187	197	223	240	269	305	440	800
f_5 / Hz	134	141	151	165	173	193	201	221	238	271	301	463	804
\bar{f} / Hz	136	141	151	162	174	190	199	222	239	270	303	452	802

4 body

Veličiny v tabulce musí být správně popsány včetně jednotek. Provedeno měření pro alespoň 10 hodnot objemu. Bylo provedeno měření s prázdnou lahví. Pro každý objem vody v lahvi alespoň tři měření. Maximální objem v lahvi ≥ 900 ml.

- b) Logaritmováním Poissonova zákona $p(V_0 - V)^\kappa = \text{konst.}$ dostaneme

$$\ln p + \kappa \ln(V_0 - V) = \text{konst.}$$

Pro diferenciály tedy platí

$$\frac{\Delta p}{p} - \kappa \frac{\Delta V}{V_0 - V} = 0,$$

tedy

$$\Delta p = \kappa p \frac{\Delta V}{V_0 - V} = \kappa p \frac{Sx}{V_0 - V}.$$

Pišme nyní pohybovou rovnici pro vzduch uvnitř hrdla láhve

$$\rho v \ddot{x} = -\Delta p S = -x \kappa p \frac{S^2}{V_0 - V},$$

tedy pro frekvenci platí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\kappa \frac{pS^2}{\rho v(V_0 - V)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\kappa \frac{RT}{M_m} \frac{S^2}{v(V_0 - V)}},$$

kde M_m je molární hmotnost vzduchu. Tedy,

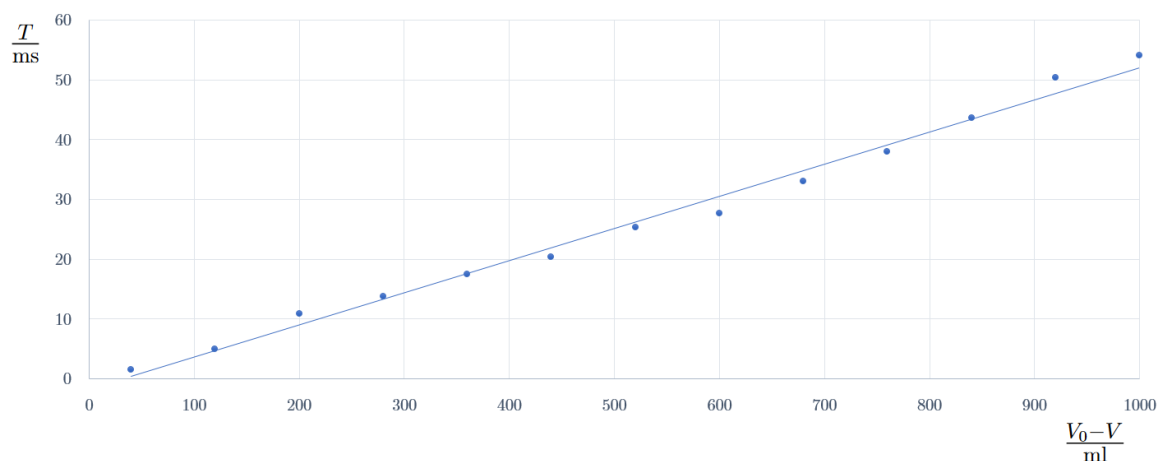
$$A = \frac{1}{4\pi^2} \kappa \frac{RT}{M_m} \frac{S^2}{v}. \quad (1)$$

2 body

c) Ze vztahu v zadání vyplývá

$$T^2 = \frac{1}{f^2} = \frac{V_0 - V}{A},$$

tedy kvadrát periody je lineární funkcí objemu $V_0 - V$ se směrnici $1/A$. Vyneseme do grafu závislost T^2 na $V_0 - V$, provedeme lineární regresi a určíme směrnici regresní křivky. Závislost je vynesena na obrázku R8.



Obr. R8

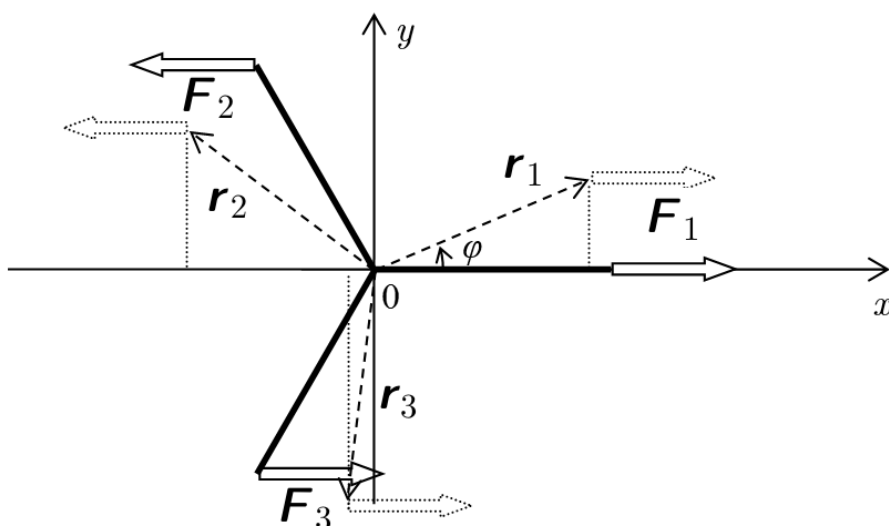
Platí $T^2 = 54 \text{ (ms)}^2 / 1 \text{ (} V_0 - V \text{)}$ (v čitateli zlomku jsou milisekundy na druhou), tedy $A = 19 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. Změříme průměr hradla lahve $d = 2,1 \text{ cm}$, tedy $S = \pi d^2 / 4 = 3,5 \text{ cm}^2$. Laboratorní teplota vzduchu při experimentu byla $22 \text{ }^\circ\text{C}$, tedy $T = 295 \text{ K}$, molární hmotnost vzduchu je podle tabulek $M_m = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Z (1) snadno dostaneme

$$v = \frac{\kappa}{4\pi^2} \frac{RT}{M_m} \frac{S^2}{A} = 19 \text{ ml}.$$

Po vydělení plochou průřezu hrdla dostáváme pro délku hrdla $5,5 \text{ cm}$, což řádově odpovídá.

4 body

Správná volba grafické závislosti 1 b., správný graf 1 b., hodnota A 1 b., hodnota a diskuse v 1 b.



Obr. R9

- 7.a) Zvolme v soustavě $0xyz$ polohu rotoru podle obr. R9, osa otáčení leží v ose z , která vystupuje kolmo z nákresny a není zakreslena. Podle směru proudu vzhledem k magnetické indukci \mathbf{B} působí na vodiče délky a rovnoběžné s osou otáčení síla buď ve směru osy x , nebo proti směru osy x . Zvolme směr \mathbf{F}_1 v kladném směru osy x , pak $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_1$. Dále označme F velikost každé z těchto sil, pak platí

$$F = F_1 = F_2 = F_3 = BIa.$$

Silový účinek magnetických sil působících na každou dvojici protilehlých vodičů délky r je v každé poloze rotoru nulový.

Působíště každé ze sil \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 je určeno polohovým vektorem \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 , jehož průmět do osy y určuje v absolutní hodnotě rameno příslušné síly. y -ové souřadnice polohových vektorů při otočení rotoru o úhel φ v kladném směru jsou

$$r_{y1} = r \sin \varphi,$$

$$r_{y2} = r \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$r_{y3} = r \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Momenty sil mají v ose z -ové souřadnice (z definice momentu síly $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$):

$$M_{z1} = -Fr \sin \varphi,$$

$$M_{z2} = Fr \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$M_{z3} = -Fr \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Výsledný moment má z -ovou souřadnici

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} + M_{z3} = -Fr \sin \varphi + Fr \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) - Fr \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) =$$

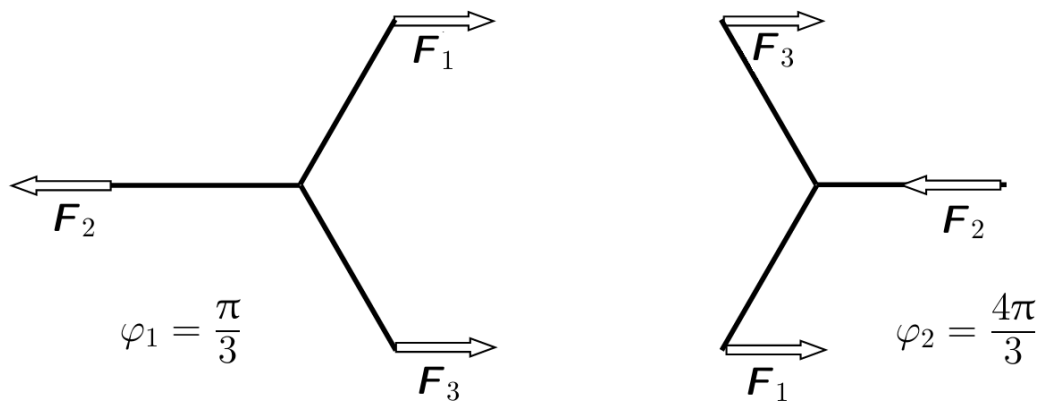
$$= Fr \left(-\sin \varphi + \sin \varphi \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \varphi \cos \frac{4\pi}{3} - \cos \varphi \sin \frac{4\pi}{3} \right) =$$

$$= Fr (\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi)$$

V rovnovážné poloze je splněna podmínka $M_z = 0$, neboli $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$.

Podmínce během jedné otočky rotoru vyhovují úhly $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ a $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Z pozice působících sil na rotor plyne, že pro φ_1 je rotor v rovnovážné poloze stálé a pro φ_2 v rovnovážné poloze vratké.



Obr. R10

4 body

b) Magnetické pole otočením rotoru z φ_1 do φ_2 vykoná práci

$$W = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} M_z d\varphi = \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} Fr (\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= Fr [\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi]_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 4Fr = 4BIar = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

2 body

c) Užijeme moment setrvačnosti tyče o hmotnosti M a délky l kolem osy otáčení kolmé k tyči a procházející jejím koncovým bodem, který je $\frac{1}{3}Ml^2$. Moment setrvačnosti rotoru je součet momentu setrvačnosti vodičů délky a rovnoběžných s osou otáčení a momentu setrvačnosti vodičů délky r kolmých k ose otáčení

$$J = \frac{a}{2r+a} m \cdot r^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2r}{2r+a} m \cdot r^2 = \frac{2r+3a}{6r+3a} mr^2.$$

V rovnovážné poloze stálé, tj. pro $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, vychýlením o malý úhel $\Delta\varphi$ dostaneme velikost direkčního momentu

$$D = \frac{|M_z|}{\Delta\varphi} = \frac{Fr \left| \sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \Delta\varphi \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \Delta\varphi \right) \right|}{\Delta\varphi} =$$

$$\begin{aligned}
&= Fr \frac{\left| \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} \cos \Delta\varphi - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} \sin \Delta\varphi - \sin \frac{\pi}{3} \cos \Delta\varphi - \cos \frac{\pi}{3} \sin \Delta\varphi \right|}{\Delta\varphi} = \\
&= Fr \frac{\left| \sqrt{3} \frac{1}{2} \cos \Delta\varphi - \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \Delta\varphi - \frac{1}{2} \sin \Delta\varphi \right|}{\Delta\varphi} = \\
&= Fr \frac{2 \sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 2Fr = 2BIar.
\end{aligned}$$

Perioda kmitů je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2r+3a}{6r+3a} mr^2}{2BIar}} = 2\pi \sqrt{\frac{(2r+3a)mr}{6(2r+a)BIa}} = 1,6 \text{ s.}$$

4 body

Alternativní řešení části a) vektorovým počtem:

Polohové vektory působí jednotlivých sil:

$$\mathbf{r}_1 = (r \cos \varphi; r \sin \varphi; 0)$$

$$\mathbf{r}_2 = \left(r \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right); r \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right); 0 \right)$$

$$\mathbf{r}_3 = \left(r \cos \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right); r \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right); 0 \right)$$

Síly:

$$\mathbf{F}_1 = (F; 0; 0)$$

$$\mathbf{F}_2 = (-F; 0; 0)$$

$$\mathbf{F}_3 = (F; 0; 0)$$

Momenty:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = (r \cos \varphi; r \sin \varphi; 0) \times (F; 0; 0) = (0; 0; -Fr \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 &= \left(r \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right); r \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right); 0 \right) \times (-F; 0; 0) = \\
&= \left(0; 0; Fr \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 &= \left(r \cos \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right); r \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right); 0 \right) \times (F; 0; 0) = \\
&= \left(0; 0; -Fr \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 &= \left(0; 0; Fr \left(-\sin \varphi + \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right) = \\
&= \left(0; 0; Fr \left(-\sin \varphi + \sin \varphi \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \varphi \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \varphi \cos \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) - \cos \varphi \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right) = (0; 0; Fr (\sqrt{3} \cos \varphi - \sin \varphi))
\end{aligned}$$