Řešení úloh školního kola 61. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2019/2020

Kategorie G – Archimédiáda

Autoři úloh: D. Kaštilová (2), V. Koudelková (5), L. Richterek (3), J. Thomas (4) a Всероссийская олимпиада по физике 2018 (1)

FO61G1–1: Kdo uzvedne více?

Protože brouk si přesně nevzpomíná, s kolika pomocníky uzvedl půl unce, připadá na něj buď 1/7 nebo 1/8 z poloviny unce, tj. buď

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot 28{,}35\,\mathrm{g} = 2{,}025\,\mathrm{g} \doteq 2{,}03\,\mathrm{g}$$

nebo

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot 28{,}35\,\mathrm{g} \doteq 1{,}771\,9\,\mathrm{g} \doteq 1{,}77\,\mathrm{g}$$ **3 body**

Na berušku připadá „téměř“ polovina hmotnosti kvintlíku, který odpovídá hmotnosti větvičky uzvednuté se sestřičkou, tj.

$$\frac{1}{2}\cdot 4{,}375\,\mathrm{g} = 2{,}187\,5\,\mathrm{g} \doteq 2{,}19\,\mathrm{g},$$

sama uzvedne méně než 2,19 g. **2 body**

Konečně na mravence připadá hmotnost okolo 11 karátů, tj. $11\cdot 0{,}2\,\mathrm{g} = 2{,}2\,\mathrm{g}$. **2 body**

Podle zadání a vypočtených hodnot nelze rozhodnout, zda uzvedne více beruška nebo mravenec, není zřejmé, zda údaj „okolo 11 karátů“ je např. 10,8 karátů (2,16 g) nebo 11,3 karátů (2,26 g). Beruška i mravenec však zřejmě uzvednou více než brouk. **3 body**

Poznámka: Na základě této úlohy a výsledků nelze usuzovat, který druh hmyzu „je větší silák“.

FO61G1–2: Dešťová voda

a) Objem vody v sudu je roven objemu kvádru s podstavou o ploše střechy S a výšce $h = 8\,\mathrm{mm} = 0{,}008\,\mathrm{m}$. Platí

$$V = 96\,\mathrm{l} = 0{,}096\,\mathrm{m}^3,\quad V = Sh,\quad S = \frac{V}{h} = \frac{0{,}096\,\mathrm{m}^3}{0{,}008\,\mathrm{m}} = 12\,\mathrm{m}^2.$$ **1 bod**

b) Známe-li plochu střechy S, a množství srážek dané výškou h odečtenou z grafu, objemy vody, která napršela v jednotlivých dnech, vypočítáme podle vztahu $V = Sh$. Postupně vychází

Pondělí: $V_1 = 12\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}008\,\mathrm{m} = 0{,}096\,\mathrm{m}^3 = 96\,\mathrm{l}$
Úterý: $V_2 = 12\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}006\,\mathrm{m} = 0{,}072\,\mathrm{m}^3 = 72\,\mathrm{l}$
Středa: $V_3 = 12\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}004\,\mathrm{m} = 0{,}048\,\mathrm{m}^3 = 48\,\mathrm{l}$
Čtvrtek: $V_4 = 12\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}006\,\mathrm{m} = 0{,}072\,\mathrm{m}^3 = 72\,\mathrm{l}$
Pátek: $V_5 = 12\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}002\,\mathrm{m} = 0{,}024\,\mathrm{m}^3 = 24\,\mathrm{l}$
Sobota: $V_6 = 12\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}004\,\mathrm{m} = 0{,}048\,\mathrm{m}^3 = 48\,\mathrm{l}$

3 body

Poznámka: Lze nahlédnout, že objem napršené vody v litrech bude číselně roven $12\times$ množství srážek v mm.

c) V předchozích dnech napršela voda o objemu

$$V_\mathrm{c} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 96\,\mathrm{l} + 72\,\mathrm{l} + 48\,\mathrm{l} + 72\,\mathrm{l} + 24\,\mathrm{l} + 48\,\mathrm{l} = 360\,\mathrm{l}.$$

Na neděli tak připadá objem $V_7 = 420\,\mathrm{l} - 360\,\mathrm{l} = 60\,\mathrm{l}$, který odpovídá výšce

$$h = \frac{V_7}{S} = \frac{0{,}06\,\mathrm{m}^3}{12\,\mathrm{m}^2} = 0{,}005\,\mathrm{m} = 5{,}0\,\mathrm{mm}$$

nedělních srážek. **2 body**

d) V sudu je celkem $V = 420\,\mathrm{l}$. Oba kamarádi spotřebovali při zalévání za den pro šest stromků celkem $V_\mathrm{d} = 6 \cdot 5\,\mathrm{l} = 30\,\mathrm{l}$ vody, měla by jim vystačit na

$$n = \frac{V}{V_\mathrm{d}} = \frac{420\,\mathrm{l}}{30\,\mathrm{l}} = 14\,\text{dní}.$$ **2 body**

e) Hmotnost vody v sudu v neděli večer byla

$$m_\mathrm{c} = \varrho V_\mathrm{c} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}420\,\mathrm{m}^3 = 420\,\mathrm{kg},$$

což je

$$n = \frac{m_\mathrm{c}}{m_\mathrm{K} + m_\mathrm{V}} = \frac{420\,\mathrm{kg}}{55\,\mathrm{kg} + 65\,\mathrm{kg}} = 3{,}5\,;$$

tj. 3,5krát více, než váží oba chlapci dohromady. **2 body**

FO61G1–3: Do Vídně a zpět

a) Cesta z Přerova do Vídně i opačným směrem trvá bez 4 minut 2 hodiny, tj. čas

$$t = 120\,\mathrm{min} - 4\,\mathrm{min} = 116\,\mathrm{min} = 6\,960\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min} \doteq 1{,}933\,3\,\mathrm{h}.$$

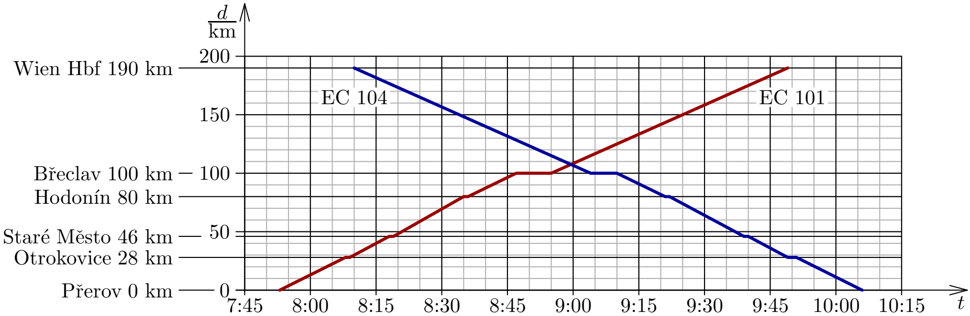
Vlak ujede za tuto dobu vzdálenost $s = 190\,\mathrm{km} = 190\,000\,\mathrm{m}$. Pro průměrnou rychlost tak dostáváme

$$v = \frac{s}{t} = \frac{190\,\mathrm{km}}{1{,}933\,3\,\mathrm{h}} \doteq 98{,}276\,\mathrm{km/h} \doteq 98\,\mathrm{km/h}.$$

Podobně získáme hodnoty i v dalších jednotkách

$$v = \frac{s}{t} = \frac{190\,\mathrm{km}}{116\,\mathrm{min}} \doteq 1{,}637\,9\,\mathrm{km/min} \doteq 1{,}6\,\mathrm{km/min},$$
$$v = \frac{s}{t} = \frac{190\,000\,\mathrm{m}}{6\,960\,\mathrm{s}} \doteq 27{,}299\,\mathrm{sm/s} \doteq 27\,\mathrm{m/s}.$$

Vzhledem ke vztahům mezi jednotkami je hodnota v km/h $3{,}6\times$ větší než hodnota v m/s a $60\times$ větší než v km/min. **3 body**



b) Graf je na obr. 1.

Obr. 1: Graf k úloze 3

4 body

c) Z grafu vlaku EC 101 vidíme (nebo si můžeme pomoci přiložením pravítka k jednotlivým úsekům), že vzdálenost nejvíce roste v úseku Staré Město–Hodonín, nejméně v úseku Břeclav–Wien Hbf. Největší průměrnou rychlost dosáhne vlak mezi Starým Městem a Hodonínem, nejmenší mezi Břeclaví a Vídní. **2 body**

Poznámka: Výpočtem lze ověřit, že vzdálenost Staré Město–Hodonín $80\,\mathrm{km} - 46\,\mathrm{km} = 34\,\mathrm{km}$ ujede za čas $35\,\mathrm{min} - 19\,\mathrm{min} = 16\,\mathrm{min} \doteq 0{,}266\,67\,\mathrm{h}$, pro rychlost pak vychází $v_{\max} = 34\,\mathrm{km}/0{,}266\,67\,\mathrm{h} \doteq 128\,\mathrm{km/h}$. Podobně úsek Břeclav–Wien dlouhý $90\,\mathrm{km}$ ujede za $54\,\mathrm{min} = 0{,}90\,\mathrm{h}$ nejmenší průměrnou rychlostí $v_{\min} = 90\,\mathrm{km}/0{,}9\,\mathrm{h} = 100\,\mathrm{km/h}$. Důvodem menší rychlosti v tomto úseku je průjezd předměstími Vídně. Tyto výsledky a úvahy nejsou po řešitelích požadovány, i když na otázku lze samozřejmě odpovědět tak, že vypočteme a porovnáme průměrné rychlosti v jednotlivých úsecích.

d) Z grafu (i z tabulky jízdních řádů) vidíme, že vlaky se setkají za Břeclaví směrem na Vídeň, z grafu odhadneme, že k setkání dojde krátce před 9:00 asi 8 km od Břeclavi. **1 bod**

Poznámka: Přesnějším výpočtem nad úroveň kategorie G zjistíme, že vlaky by se měly setkat v 8:59:30 asi 7,5 km za Břeclaví, tj. v blízkosti stanice Bernhardsthal (jak najdeme např. měřením v aplikaci `http://mapy.cz`).

FO61G1–4: Nákladní loď

a) Přechod od zádi k přídi trvá lodníkovi čas

$$t = \frac{l}{v} = \frac{60\,\mathrm{m}}{1{,}2\,\mathrm{m/s}} = 50\,\mathrm{s},$$

za stejný čas přejde loď i opačným směrem z přídě na záď. **2 body**

b) Loď přitom s proudem řeky urazí vzhledem ke břehu vzdálenost

$$d = u(2t) = \frac{2ul}{v} = \frac{2 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 60\,\mathrm{m}}{1{,}2\,\mathrm{m/s}} = 150\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

c) Vzhledem k lodi lodník ujde dráhu

$$s_1 = n2l = 10 \cdot 2 \cdot 60\,\mathrm{m} = 1\,200\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

d) Při chůzi ve směru proudu (ze zádě na příď) se lodník vzhledem ke břehu pohybuje rychlostí $u+v$, při chůzi proti proudu řeky (z přídě na záď) rychlostí $u-v$, celkem urazí vzhledem ke břehu dráhu

$$s_2 = n\left[t\left(u+v\right)+t\left(u-v\right)\right] = n\left[\frac{l}{v}\left(u+v\right)+\frac{l}{v}\left(u-v\right)\right] = nl\frac{2u}{v} =$$

$$= nd = 10\cdot 60\,\mathrm{m}\cdot\frac{2\cdot 1{,}5\,\mathrm{m/s}}{1{,}2\,\mathrm{m/s}} = 1\,500\,\mathrm{m}.$$ **4 body**

Poznámka: Na otázku lze odpovědět i bez výše uvedeného výpočtu – lodník bude na stejném místě vzhledem k lodi a vůči břehu se posune o stejnou vzdálenost jako příď lodi, tj. $s_2 = nd$.

FO61G1–5: Experimentální úloha: těžiště brambory

Není předepsán jediný možný způsob. Bramboru lze zavěšovat pomocí jehly na niti nebo pomocného papírového košíčku v různých místech, opírat bramboru na hraně stolu apod., přitom např. fixem vyznačit několik těžnic. Nejsnáze se asi o přibližném nalezení těžiště lze přesvědčit tím, že bramboru podepřeme pod těžištěm alespoň ve dvou různých polohách (viz např. obr. 2).

Obr. 2: Podepření brambory pod těžištěm