

# Řešení úloh krajského kola 60. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autor úloh J. Thomas

1. a) Celková dráha automobilu závisí na čase  $t_1$ .

$$s = \frac{v_0 t_1}{2} + a \frac{(t - t_1)^2}{2} = \frac{v_0 t_1}{2} + \frac{v_0 (t - t_1)^2}{t_1} = \frac{v_0}{2} \left[ t_1 + \frac{(t - t_1)^2}{t_1} \right].$$

Rovnici upravíme na tvar

$$\frac{2st_1}{v_0} = t_1^2 + (t - t_1)^2 \text{ nebo } t_1^2 - \left( t + \frac{s}{v_0} \right) t_1 + \frac{t^2}{2} = 0. \quad (1)$$

Závislost dráhy  $s$  na čase má tvar paraboly. Minimum funkce odpovídá dvojnásobný kořen kvadratické rovnice.

Diskriminant této kvadratické rovnice

$$D = \left( t + \frac{s}{v_0} \right)^2 - 2t^2 = \left( t + \frac{s}{v_0} - t\sqrt{2} \right) \left( t + \frac{s}{v_0} + t\sqrt{2} \right).$$

Dráha bude minimální, když  $t + \frac{s}{v_0} - t\sqrt{2} = 0 \Rightarrow s = (\sqrt{2} - 1) v_0 t$ .

**4 body**

b) Řešením rovnice (1)

$$t_1 = \frac{t + \frac{s}{v_0} \pm \sqrt{\left( t + \frac{s}{v_0} \right)^2 - 2t^2}}{2} = \frac{t\sqrt{2} \pm \sqrt{2t^2 - 2t^2}}{2} = t \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**2 body**

c) Velikost zrychlení automobilu  $a = \frac{v_0}{t_1} = \frac{2v_0}{t\sqrt{2}} = \frac{v_0\sqrt{2}}{t}$ .

**2 body**

d) Konečná rychlost automobilu

$$v_1 = a(t - t_1) = v_0 \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = v_0 \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = v_0 (\sqrt{2} - 1).$$

Číselně:  $s = 41 \text{ m}$ ,  $t_1 = 7 \text{ s}$ ,  $a = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $v_1 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2 body**

2. a) Je-li trubice ve svislé poloze a bublinka se pohybuje rovnoměrně, je v rovnováze vztlaková síla  $F_{vz} = V\rho g$ , která působí směrem vzhůru s odporovou silou  $F_o = 6\pi\eta r v_0$ , která má opačný směr. Tíhu samotné bublinky můžeme zanedbat. Platí tedy

$$V\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2\rho g}} = 2,3 \text{ mm}.$$

**2 body**

b) Ze vztahu  $V\rho g = 6\pi\eta r v_0$  vidíme, že rychlost pohybu bublinky je úměrná tíhovému zrychlení  $v_0 = kg$ .

Pohybuje-li se trubice vodorovně, je rychlost pohybu bublinky vzhledem k trubici úměrná zrychlení trubice:  $v = ka$ .

Bublinka se přitom pohybuje ve stejném směru jako trubice.

Protože  $v = \frac{x}{t}$  (bublinka se pohybuje rovnoměrně) a  $v_1 = at$  (trubka se pohybuje rovnoměrně zrychleně), platí pro vzdálenost uraženou bublinkou:

$$x = vt = kat = \frac{v_0}{g}v_1 = 1,0 \text{ cm.} \quad (1)$$

Bublinka se tedy bude nacházet 6,0 cm od zadního (levého) okraje trubice.

**4 body**

c) Při zastavení trubice se bublinka vrátí na původní místo.

**2 body**

d) Aby se bublinka dostala k okraji trubice, musí urazit vzdálenost  $\frac{l}{2} = 5,0 \text{ cm}$ .

Z rovnice (1)

$$\frac{l}{2} = \frac{v_0}{g}v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{lg}{2v_0} = 49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Trubice by musela získat rychlost téměř  $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2 body**

**3.** Zvolme vztažnou soustavu, jejíž osa  $x$  je rovnoběžná s deskami kondenzátoru a osa  $y$  je k ní kolmá.

a) Velikost rychlosti elektronu při jeho vstupu do elektrického pole označme  $v_1$ , velikost rychlosti elektronu při jeho výstupu z elektrického pole označme  $v_2$ .

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Její složka ve směru osy  $x$  se během pohybu v elektrickém pole nemění  $v_{1x} = v_{2x} = v_1 \cos \alpha$ . Rychlost elektronu při výstupu z elektrického pole má velikost  $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}$ . Pro její složku  $v_{2y}$  platí

$$v_{2y} = v_{2x} \operatorname{tg} \beta = v_1 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Velikost rychlosti elektronu, který opouští elektrické pole

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{v_1^2 \cos^2 \alpha + v_1^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} = \\ &= v_1 \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = v_1 \cos \alpha \sqrt{2} = 7,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

**4 body**

b) Na zvýšení kinetické energie elektronu muselo elektrické pole vykonat práci

$$e \cdot U = E_{k2} - E_{k1}.$$

Protože se rychlost elektronu zvýšila  $\cos \alpha \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}$ -krát, zvýšila se jeho kinetická energie 1,5-krát. Hledané napětí

$$U = \frac{E_{k2} - E_{k1}}{e} = 0,5 \frac{E_{k1}}{e} = 50 \text{ V.}$$

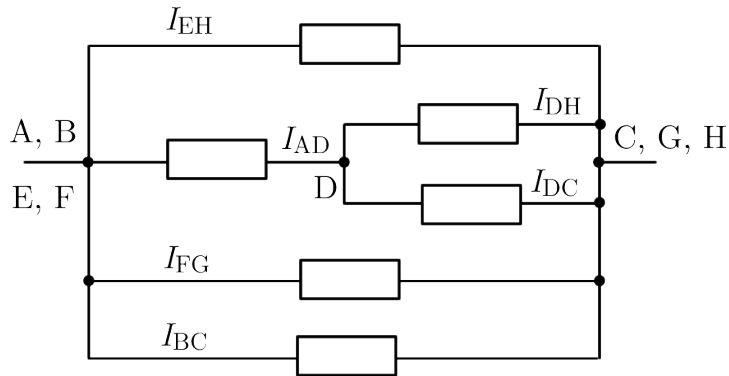
**3 body**

c) Při pohybu částice v magnetickém poli platí:

$$\frac{mv_2^2}{r} = Bev_2 \Rightarrow B = \frac{mv_2}{er} = \frac{mv_2}{ed} \sin \beta = 0,29 \text{ mT.}$$

**3 body**

4. Zapojení si můžeme překreslit takto:



Obr. R1

a) Pro celkový odpor platí:  $\frac{1}{R_C} = \frac{3}{R} + \frac{2}{3R} \Rightarrow R_C = \frac{3}{11}R = 27,3 \Omega.$

**2 body**

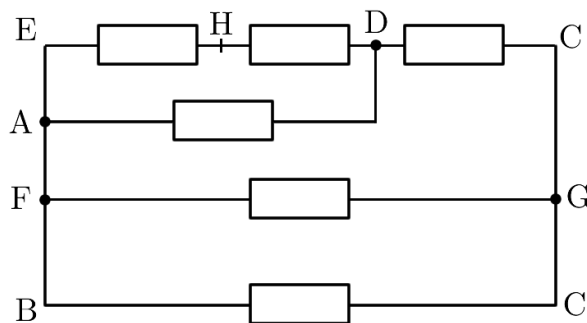
Označme  $I_{EH} = I_{FG} = I_{BC} = I_1$ ;  $I_{AD} = I_2$ ;  $I_{DH} = I_{DC} = I_3.$

$$I_1 = \frac{U}{R} = I_{EH} = I_{FG} = I_{BC} = 0,24 \text{ A,}$$

Protože  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{3}{2}R}{R} = \frac{3}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3}I_1 = I_{AD} = 0,16 \text{ A, } I_3 = \frac{1}{2}I_2 = I_{DH} = I_{DC} = 0,08 \text{ A.}$

**3 body**

b) Schéma zapojení je nyní



Obr. R2

Pro celkový odpor platí:  $\frac{1}{R_C} = \frac{2}{R} + \frac{3}{5R} \Rightarrow R_C = \frac{5}{13}R = 38,5 \Omega.$

Celkové napětí se nezměnilo, celkový odpor se zvětšil, celkový příkon je nyní menší než před přerušením vodiče GH.

**2 body**

- c) Protože se celkové napětí ani odpor každého rezistoru po přerušení vodiče GH nezmění, stačí porovnat proudy nebo napětí na jednotlivých rezistorech.

*Porovnáním proudů:*

Proudy  $I_{FG} = I_{BC}$  se nezměnily. Nezměnil se tedy ani příkon na rezistorech mezi body FG a BH.

Proud mezi body D a C:  $I_{DC} = \frac{3U}{5R} > \frac{U}{3R} \Rightarrow$  příkon na rezistoru mezi body D a C se zvětší.

Dále platí:

$$I_{AD} = 2I_{AEHD} \text{ a } I_{AD} + I_{AEHD} = I_{DC} \Rightarrow I_{AEHD} = \frac{I_{DC}}{3} = \frac{U}{5R} < \frac{U}{3R} < \frac{U}{R},$$

z čehož plyne, že příkon na rezistorech EH a HD bude menší;

$$I_{AD} = \frac{2}{3}I_{DC} = \frac{2U}{5R} < \frac{2U}{3R} \Rightarrow \text{příkon na rezistoru AD bude menší.}$$

**3 body**

*Porovnáním napětí:*

Před přerušením vodiče GH platilo:

$$U_{EH} = U_{FG} = U_{BC} = U,$$

$$U_{AD} = \frac{2}{3}U,$$

$$U_{DH} = U_{DC} = \frac{1}{3}U.$$

Po přerušení vodiče HD platí:

$$U_{FG} = U_{BC} = U \Rightarrow \text{příkon se nezměnil,}$$

$$U_{EH} = U_{HD} = \frac{1}{5}U < \frac{1}{3}U < U \Rightarrow \text{příkon se zmenší,}$$

$$U_{AD} = \frac{2}{5}U < \frac{2}{3}U \Rightarrow \text{příkon se zmenší,}$$

$$U_{DC} = \frac{3}{5}U > \frac{1}{3}U \Rightarrow \text{příkon se zvětší.}$$