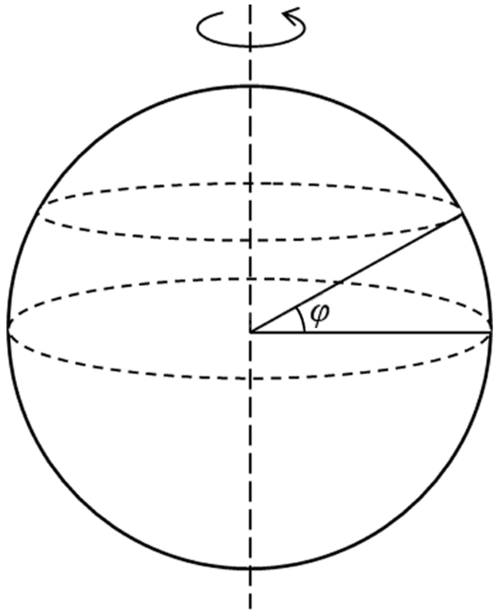
Zadání úloh 1. kola 60. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Tíhová síla na povrchu planety

Pevná planeta má tvar koule s radiálním gravitačním polem. Na těleso umístěné na povrchu planety působí gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$. Planeta rotuje kolem své osy tak, že velikost setrvačné odstředivé síly F_{s0} působící na těleso umístěné na rovníku a velikost gravitační síly F_g působící na totéž těleso splňuje vztah $F_{s0} = kF_g$, kde $k \in \langle 0; 1\rangle$. Označme $\varphi \in \langle 0; 90°\rangle$ „zeměpisnou šířku" polohy tělesa, tj. úhel mezi spojnicí tělesa se středem planety a rovinou rovníku. Výslednice gravitační síly $\boldsymbol{F}_g$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_s$ působící na těleso v libovolném místě povrchu planety je tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$.



Obr. 1

a) Vyjádřete velikost tíhové síly F_G působící na dané těleso na povrchu v závislosti na úhlu φ a určete její minimální velikost $F_{G\,\mathrm{min}}$ a maximální velikost $F_{G\,\mathrm{max}}$.

b) Vyjádřete závislost velikosti úhlu α mezi tíhovou a gravitační silou působící na dané těleso na povrchu na úhlu φ.

c) Určete úhel φ_1, kde je velikost úhlu α maximální, a určete tuto maximální velikost α_{max}.

Úlohy a), b) a c) řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $k = \dfrac{1}{3}$.

d) Použijte uvedený model pro planetu Jupiter a zjistěte hodnotu k, minimální velikost g_{min} a maximální velikost g_{max} tíhového zrychlení na povrchu, velikost maximálního úhlu α_{max} mezi tíhovou a gravitační silou a „zeměpisnou" šířku φ_1, kde tato situace nastane.

Jupiter považujte za kouli o poloměru $R = 69\,900$ km. Hmotnost Jupitera je $M = 1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg. Siderická doba rotace Jupitera kolem své osy je $T = 35\,700$ s. Gravitační konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

2. Sud s asfaltem

Otevřený sud má tvar válce a je vyroben z železného plechu. Výška sudu H je 1,5krát větší než jeho průměr. Je-li sud zcela naplněn asfaltem, je hmotnost asfaltu 16krát větší než hmotnost prázdného sudu. Hustota železa je ρ_0, hustota asfaltu ρ.

a) Určete tloušťku d železného plechu, z něhož je sud vyroben.

b) Sud máme postavený na dně. Zvolme svislou osu y s počátkem na dně sudu a označme h proměnnou výšku vodorovné hladiny asfaltu v sudu. Při jaké výšce

h_0 hladiny asfaltu v sudu je těžiště sudu s asfaltem nejníže? Určete též tuto minimální výšku těžiště $y_{\min}$.

Řešte obecně, pak pro hodnoty $\rho = 1\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_0 = 7\,900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Tloušťka plechu je zanedbatelná vzhledem k rozměrům sudu.

3. Tekutý dusík

Na jedné mezinárodní fyzikální olympiádě byla soutěžícím předložena experimentální úloha, v níž měřili měrné skupenské teplo varu kapalného dusíku. K dispozici měli tekutý dusík (při teplotě varu) v polystyrénové nádobě uzavřené víčkem s větracím otvorem, stopky, váhy a hliníkový váleček.

V naší úloze vyjdeme z výsledků obdobného měření. Teplota varu dusíku je $T_v = 77{,}4$ K. Hliníkové těleso má hmotnost $m_0 = 14{,}1$ g a teplotu okolního vzduchu $T_1 = 294$ K. Na digitální váhy postavíme polystyrénovou nádobu s dusíkem, který se při varu vypařuje, čímž jeho hmotnost klesá. Po jisté době těleso do nádoby s dusíkem opatrně ponoříme. Následuje prudký var do okamžiku, než teplota tělesa klesne na teplotu varu dusíku. Poté pokračuje odpařování dusíku jako před vnořením tělesa. Okamžitou hmotnost nádoby s dusíkem sledujeme na displeji digitálních vah.

Na počátku pokusu spustíme vynulované stopky a necháme běžet po celou dobu měření. Vždy po změně hmotnosti o 1,0 g čas zaznamenáme. Takto naměříme šest časů před vnořením tělesa a dalších šest časů od libovolného okamžiku po dosažení tepelné rovnováhy mezi tělesem a dusíkem.

Zjištěnou časovou závislost hmotnosti nádoby s dusíkem (v druhé fázi již po odečtení hmotnosti hliníkového tělesa) udává tabulka:

$\frac{m}{\text{g}}$	203,0	202,0	201,0	200,0	199,0	198,0	181,9	180,9	179,9	178,9	177,9	176,9
$\frac{\tau}{\text{s}}$	0	28	56	83	112	140	271	300	330	360	390	419

Měrná tepelná kapacita hliníku je při použitém teplotním rozdílu významně závislá na teplotě, s rostoucí teplotou roste. Tuto závislost budeme aproximovat polynomem 4. stupně:

$$c = AT^4 + BT^3 + CT^2 + DT + E,$$

kde $A = -4{,}337 \cdot 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-5}$, $B = 3{,}693 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-4}$, $C = -0{,}119\,9 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-3}$, $D = 19{,}38 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-2}$, $E = -585{,}1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Teplo odevzdané hliníkovým tělesem při ochlazení z teploty T_1 na teplotu T_v pak je

$$Q = -m_0 \int_{T_1}^{T_v} c \, \mathrm{d}T = m_0 \int_{T_v}^{T_1} c \, \mathrm{d}T.$$

a) Určete z polynomu lineární interpolací přibližné teplo Q', které váleček dusíku odevzdal. Lineární interpolace znamená použít aritmetický průměr měrných tepelných kapacit pro krajní teploty.
b) Určete integrací polynomu teplo Q, které těleso dusíku odevzdalo.
c) Sestrojte bodový graf závislosti hmotnosti nádoby s dusíkem na čase. Každou skupinu šesti vynesených bodů proložte přímkou. Z grafu odečtěte změnu hmotnosti Δm dusíku během ochlazení tělesa a určete měrné skupenské teplo varu l_v dusíku.

Úlohu je vhodné řešit pomocí vhodného tabulkového kalkulátoru, např. Excelu.

4. Spektrometr

Součástí spektrometru je hranol s lámavým úhlem $\varphi = 60°$. Na jeho boční stěnu dopadá pod úhlem $\alpha = 30°$ paprsek bílého světla. Index lomu pro světlo fialové o vlnové délce $\lambda_V = 400$ nm je $n_V = 1{,}46$, pro světlo červené o vlnové délce $\lambda_R = 700$ nm je to $n_R = 1{,}42$. Určete:

a) rozdíl deviací (odchylek od původního směru) $\delta_V - \delta_R$ fialového a červeného světla,
b) mřížkovou konstantu b mřížky, kterou můžeme hranol nahradit a na kterou světlo dopadá kolmo, kde by rozdíl odchylek mezi červeným a fialovým světlem ve spektru 1. řádu $\alpha_R - \alpha_V$ byl stejný jako rozdíl deviací $\delta_V - \delta_R$ optického hranolu.

Úlohu je vhodné řešit pomocí vhodného tabulkového kalkulátoru, např. Excelu.

5. Zvětšení úsečky

Na optické ose tenké spojné čočky s ohniskovou vzdáleností f leží malá tyčinka, jejíž rozměr je v porovnání s ohniskovou vzdáleností zanedbatelný. Vzdálenější konec tyčinky leží ve vzdálenosti $a_1 = 20$ cm od čočky. Obraz tyčinky za čočkou je $k = 9$krát větší, než tyčinka.

a) Jaká je ohnisková vzdálenost čočky?
b) Jak se změní velikost obrazu tyčinky, posuneme-li tyčinku o vzdálenost $\Delta a = 5$ cm směrem od čočky?

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty. Při řešení můžete použít přibližný vztah
$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \text{ pro } |x| \ll 1.$$

6. Rozpad supertěžkých jader

Při studiu supertěžkých prvků se pro každé vyprodukované jádro měří doba od jeho vzniku do rozpadu (doba života konkrétního jádra). Tato veličina se pro jednotlivá jádra liší, a tak lze pro daný izotop určit pouze střední dobu života τ a také poločas rozpadu $T_{1/2}$ (čas, za který se rozpadne polovina jader). Doba života konkrétního jádra je náhodná veličina, kterou budeme simulovat házením hrací kostkou.

Nejprve se seznámíme s rozdělením pravděpodobnosti náhodné veličiny a střední hodnotou náhodné veličiny.

První experiment. Hod hrací kostkou. Náhodnou veličinou je číslo X, které je po zastavení kostky nahoře. Tato náhodná veličina je diskrétní povahy a nabývá jen konečného počtu šesti hodnot. Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je funkce, která v daném experimentu každé hodnotě náhodné veličiny přiřazuje pravděpodobnost, s jakou tato hodnota nastává. Pokud je kostka pravidelná a házíme „poctivě“, bude mít padnutí každého čísla stejnou pravděpodobnost, a to $1/6$. Takové rozdělení se nazývá *rovnoměrné*. Střední hodnota μ náhodné veličiny X se určí

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Hodnota veličiny se násobí příslušnou pravděpodobností a tyto součiny vypočítané pro všechny možné hodnoty se sčítají. Tak se počítá střední hodnota náhodné veličiny pro každé diskrétní rozdělení, nejen rovnoměrné. Střední hodnota náhodné veličiny X představuje číslo, ke kterému by se blížil aritmetický průměr hodnot této náhodné veličiny při velkém počtu realizace experimentu.

Druhý experiment. Házíme jednou kostkou tak dlouho, až padne šestka (jako by se padnutím šestky kostka rozpadla a nešlo v hodech pokračovat). Náhodná veličina X je počet hodů potřebných na padnutí šestky (nazývejme ji doba života kostky). Počet hodů potřebných k dosažení šestky může být překvapivě vysoký, teoreticky nekonečný. Náhodná veličina X je diskrétní, ale může nabývat hodnot všech přirozených čísel. Intuitivně cítíme, že nejde o rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti. Vysoké hodnoty náhodné veličiny X mají jistě menší pravděpodobnost než nízké hodnoty. O jaké rozdělení pravděpodobnosti jde, určíme z úvahy, že kostka nemá paměť.

Pravděpodobnost, že v konkrétním hodu padne šestka, je $p_{\text{teor}} = \dfrac{1}{6}$ (že nepadne šestka, je $1 - p_{\text{teor}} = \dfrac{5}{6}$) a je stále stejná. Tedy v prvním hodu, ve druhém hodu a v každém dalším také. Hody jsou na sobě nezávislé pokusy, a pro nezávislé pokusy platí násobení pravděpodobností (viz literatura uvedená v závěru úlohy, kapitola Nezávislé pokusy).

Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka v 1. hodu ($X = 1$), je

$$p_1 = \frac{1}{6} = 0{,}166\,7.$$

Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka ve 2. hodu ($X = 2$), je

$$p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}138\,9.$$

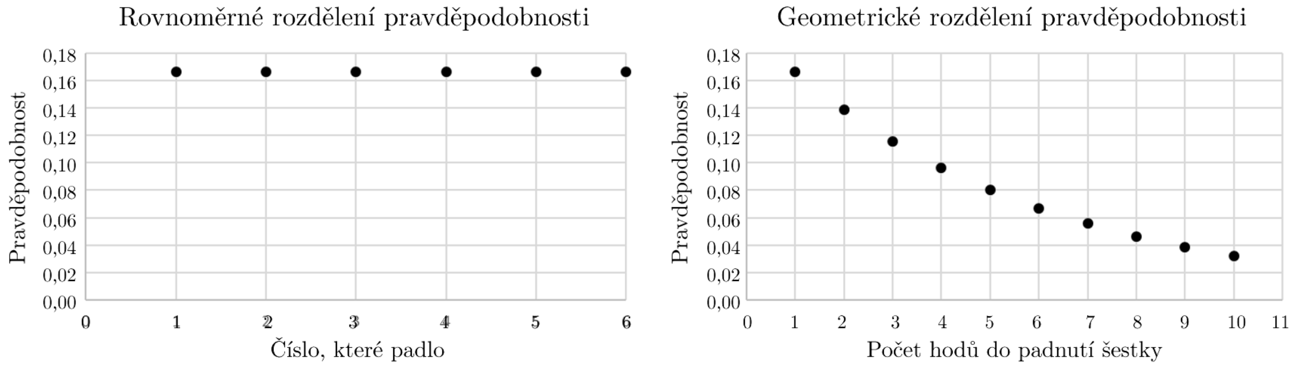
Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka ve 3. hodu ($X = 3$), je

$$p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}115\,7.$$

Pravděpodobnost, že na kostce padne šestka v hodu t ($X = t$), je

$$p_t = \left(\frac{5}{6}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Toto rozdělení se nazývá *geometrické*. Je vidět, že s rostoucí hodnotou t pravděpodobnost klesá. Geometrické rozdělení v grafu můžeme vidět jako body na klesající exponenciální funkci.



Obr. 2

Odvodit střední hodnotu μ geometrického rozdělení není již tak jednoduché, protože veličina X nabývá hodnot od jedničky do nekonečna. Z odvození (které pro složitost neuvádíme) vychází jednoduchý výsledek

$$\mu = \frac{1}{p}, \tag{1}$$

kde p je pravděpodobnost, že v konkrétním pokusu nastane sledovaný jev (zde padnutí šestky). Pro $p_{\mathrm{teor}} = \dfrac{1}{6}$ vypočítáme střední dobu života kostky $\mu = 6$.

Situace s čekáním na šestku již připomíná zákon radioaktivního rozpadu

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\ ,$$

kde N_0 je počet nestabilních jader v čase $t = 0$, N je počet dosud nerozpadlých jader v čase t a λ je přeměnová (rozpadová) konstanta.

Po úpravě

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

lze zlomek chápat jako pravděpodobnost nerozpadnutí jádra v časovém intervalu $(0; t)$. Se zvětšujícím se časem pravděpodobnost, že nedojde k rozpadu, exponenciálně klesá podobně jako při házení kostkou. Čas se však při sledování jader mění spojitě, zatímco počet hodů je diskrétní.

Ze zákona radioaktivního rozpadu lze odvodit vztah pro střední dobu života τ jádra

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \tag{2}$$

který se podobá našemu vztahu (1) pro experiment s kostkou. Jak již bylo zmíněno výše, střední doba života τ představuje hodnotu, ke které by se blížil aritmetický průměr dob života získaný měřením rozpadu velkého počtu nestabilních jader.

Poznámka: Rozdělení dob života konkrétních jader je spojité a doba života může nabývat libovolné hodnoty. Řídí se proto exponenciálním, nikoli geometrickým rozdělením pravděpodobnosti.

U supertěžkých prvků se daří vyprodukovat jen několik málo jader a změřit u nich dobu života. Průměrná doba života je pak nejlepším odhadem τ, a z něj se podle vztahu (3) určí odhad poločasu rozpadu jádra

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2. \tag{3}$$

Praktické úkoly: V následujících úkolech budeme rozpad nestabilních jader simulovat házením běžnou (zpočátku) dřevěnou hrací kostkou. Při zpracování dat určíme střední dobu μ života kostky a pravděpodobnost p padnutí šestky. Místo sedmi hracích kostek představujících 7 atomů stačí jedna hrací kostka, se kterou začneme házet a budeme čekat na padnutí šestky. Po padnutí šestky se ale kostka reálně nerozpadne, proto můžeme pokračovat v házení a čekat na druhé padnutí šestky atd. až do sedmého padnutí.

a) Podle experimentu 2 naházejte hrací kostkou první sérii 7 hodnot veličiny X. Tomu odpovídá rozpad řekněme sedmi vyprodukovaných jader oganessonu. Ze získaných hodnot náhodné veličiny X vypočtěte odhad střední doby života kostky μ a odhad pravděpodobnosti padnutí šestky p.
b) Proveďte ještě tři takové série a z každých sedmi hodnot veličiny X určete opět odhad μ a p. Výsledky všech čtyř sérií uspořádejte přehledně do tabulky.
c) Porovnejte výsledky mezi jednotlivými sériemi. Porovnejte, o kolik procent se čtyři vypočtené pravděpodobnosti odlišují od teoretické pravděpodobnosti $p_{\text{teor}} = \frac{1}{6}$.
d) Spojte čtyři série do jedné (28 hodnot veličiny X) a znovu určete pravděpodobnost p padnutí šestky. O kolik procent se nyní liší pravděpodobnost od teoretické hodnoty p_{teor}?

e) Nyní upravte hrací kostku a udělejte z ní kostku falešnou. Do středu stěny s jedničkou (jedna tečka) vyvrtejte otvor a zalepte malou matku tak, aby nevyčnívala. Do kostky o hraně 15 mm je vhodná matka se závitem 4 mm. S falešnou kostkou zopakujte úkoly a), b) a d) (kromě porovnání s teoretickou hodnotou pravděpodobnosti, kterou nyní neznáme). Výsledky všech čtyř sérií uspořádejte přehledně do tabulky. Porovnejte pravděpodobnosti p mezi jednotlivými sériemi a také výsledky ze spojených sérií řádné a falešné kostky.

f) Jaké závěry můžeme z úkolů a) až e) učinit?

Literatura: E. Calda, V. Dupač, Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.

7. Cyklotron

V Laboratoři jaderných reakcí SÚJV v Dubně pracuje izochronní cyklotron těžkých iontů U400M. Umožňuje urychlovat např. ionty argonu ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}^{11+}$ na kinetickou energii $E_k = 1\,520$ MeV. Relativní atomová hmotnost iontů je 39,962 383 12, svazek se vyvádí na poloměru $r_{\max} = 1{,}750$ m, urychlující napětí mezi duanty je 150 kV. Klidová energie elektronu je 0,511 MeV, klidová energie odpovídající atomové hmotnostní jednotce je 931,494 MeV, rychlost světla $3 \cdot 10^8 \mathrm{~m \cdot s^{-1}}$.

a) Vypočtěte klidovou energii E_0 používaných iontů argonu. Jaký je poměr E_0 a kinetické energie E_k?

Z výsledku a) plyne, že neuděláme příliš velkou chybu, když v dalších úlohách nebudeme uvažovat speciální teorii relativity. Výpočty se značně zjednoduší, když magnetické pole v komoře budeme považovat za homogenní. Řešení v úlohách b) c) d) proveďte nejprve obecně s využitím veličin E_0 a E_k, až pak určete číselné výsledky.

b) Vypočtěte frekvenci obíhání iontů.

c) Vypočtěte magnetickou indukci pole, které zakřivuje trajektorii iontů.

d) Předpokládejme ideálně, že iont vstupuje do mezery mezi duanty v okamžiku, kdy napětí je v amplitudě. Kolikrát v tomto případě proletí iont mezeru mezi duanty, než je urychlen na požadovanou energii?
Poznámka: Reálně je počet průletů vždy vyšší.

e) Jak dlouho trvá pro situaci popsanou v d) urychlení iontu na konečnou energii?