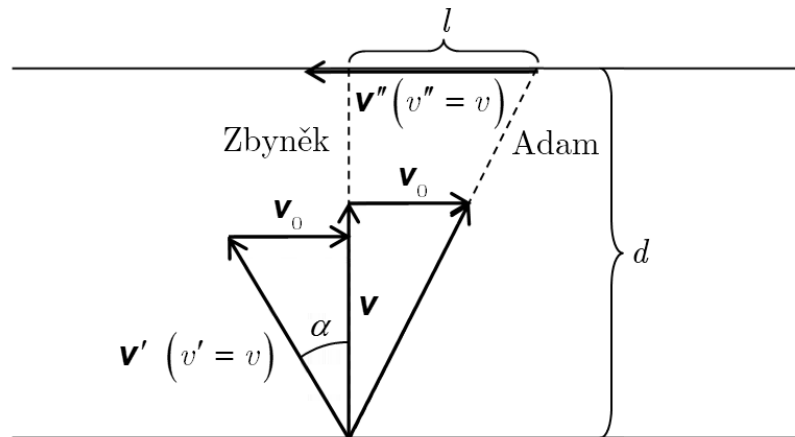


# Řešení úloh 1. kola 59. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů



Obr. 1

- 1.a) Označme  $v$  velikost rychlosti plavce vzhledem k vodě a  $v_0$  velikost rychlosti toku řeky. Pak platí

$$\sin \alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{\frac{l}{t_1}}{\frac{d}{t_1}} = \frac{l}{d}.$$

Číselně vychází  $\alpha = 38^\circ$ .

**2 body**

- b) Adam plaval po dobu

$$t_A = t_1 + \frac{l}{v - v_0} = t_1 + \frac{l}{\frac{d}{t_1} - \frac{l}{t_1}} = t_1 + \frac{l}{d - l} t_1 = \frac{d}{d - l} t_1.$$

Zbyněk plaval po dobu

$$t_Z = \frac{d}{\sqrt{v^2 - v_0^2}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} - \frac{l^2}{t_1^2}}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 - l^2}} t_1.$$

Číselně vychází  $t_A = 240$  s,  $t_Z = 120$  s.

**5 bodů**

- c) Pro  $l < d$  je rychlost toku řeky menší než rychlost plavce, úloha má řešení. Pro  $l = d$  jsou velikosti rychlosti toku řeky a plavců stejné, Adam v druhé fázi zůstává vzhledem k břehu na místě a do cíle se nedostane. Zbyněk musí volit úhel  $\alpha = 90^\circ$  a je ve stejné situaci. Pro  $l > d$  je rychlost toku řeky větší než rychlost plavců, Adam v druhé fázi a Zbyněk jsou unášeni tokem řeky a do cíle se nedostanou.

**3 body**

- 2.a) Z kinematických rovnic

$$v_1 = gt, \quad h = \frac{1}{2}gt^2$$

dostaneme vyloučením času velikost rychlosti míčku bezprostředně před zásahem:

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Zvolíme-li směr osy  $y$  svisle vzhůru, má diabolka souřadnici rychlosti  $v_{0y} = 170 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a míček  $v_{1y} = -\sqrt{2gh}$  (pohybuje se proti směru osy  $y$ ). Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$m_0 \mathbf{v}_0 + m_1 \mathbf{v}_1 = (m_0 + m_1) \mathbf{u},$$

pro souřadnice hybnosti plyne

$$m_0 v_{0y} + m_1 v_{1y} = (m_0 + m_1) u_y.$$

Z rovnice dostaneme

$$u_y = \frac{m_0 v_{0y} + m_1 v_{1y}}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 v_0 - m_1 \sqrt{2gh}}{m_0 + m_1} = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Jelikož je souřadnice rychlosti kladná, pohybuje se míček v kladném směru osy  $y$ , tj. nahoru, s počáteční rychlostí o velikosti  $u = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**5 bodů**

*Alternativní řešení bez zavedení soustavy souřadnic:*

Užijeme zákon zachování hybnosti:

$$m_0 \mathbf{v}_0 + m_1 \mathbf{v}_1 = (m_0 + m_1) \mathbf{u}.$$

Jelikož se tělesa pohybují proti sobě, je velikost hybnosti před srážkou rovna velikosti hybnosti po srážce:

$$|m_0 v_0 - m_1 v_1| = (m_0 + m_1) u.$$

Z rovnice plyne

$$u = \frac{|m_0 v_0 - m_1 v_1|}{m_0 + m_1} = \frac{|m_0 v_0 - m_1 \sqrt{2gh}|}{m_0 + m_1} = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Směr rychlosti určíme dodatečně porovnáním velikostí hybnosti těles před srážkou.

Velikost hybnosti diabolky je

$$p_0 = m_0 v_0 = 0,092 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

velikost hybnosti míčku

$$p_1 = m_1 \sqrt{2gh} = 0,070 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

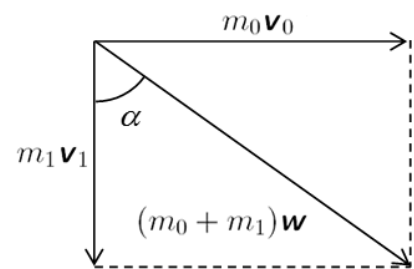
Jelikož  $p_0 > p_1$ , pohybuje se míček s diabolkou ve směru vzhůru rychlostí o velikosti  $u = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- b) Rychlosti míčku a diabolky bezprostředně před srážkou jsou vzájemně kolmé. Ze zákona zachování hybnosti

$$m_0 \mathbf{v}_0 + m_1 \mathbf{v}_1 = (m_0 + m_1) \mathbf{w},$$

pro velikosti hybností plyne

$$(m_0 v_0)^2 + (m_1 v_1)^2 = [(m_0 + m_1) w]^2.$$



Obr. 2

Z rovnice dostaneme

$$w = \frac{\sqrt{(m_0 v_0)^2 + (m_1 v_1)^2}}{m_0 + m_1} = \frac{\sqrt{(m_0 v_0)^2 + 2m_1^2 gh}}{m_0 + m_1} = 5,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**3 body**

Směr rychlosti určíme např. jako odchylku  $\alpha$  rychlosti  $\mathbf{w}$  od svislého směru:

$$\text{tg } \alpha = \frac{m_0 v_0}{m_1 v_1} = \frac{m_0 v_0}{m_1 \sqrt{2gh}}.$$

Číselně vychází  $\alpha = 53^\circ$ .

**2 body**

- 3.a) Označíme-li  $S$  obsah vodorovné stěny každého kvádrů a  $\rho$  jeho hustotu, pak platí

$$\rho = \frac{m_1}{Sh_1} = \frac{m_2}{Sh_2}.$$

Z rovnosti druhého a třetího členu plyne

$$m_2 = \frac{h_2}{h_1} m_1, \quad (1)$$

číselně  $m_2 = 760 \text{ g}$ .

**2 body**

- b) V prvním případě je velikost třecí síly mezi kvádrů menší než velikost třecí síly mezi soustavou kvádrů a podložkou:

$$f m_1 g < f' (m_1 + m_2) g.$$

Do pravé strany nerovnice dosadíme vztah (1) a upravíme:

$$f' (m_1 + m_2) g = f' \left( m_1 + \frac{h_2}{h_1} m_1 \right) g = f' m_1 \left( 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) g = f' m_1 \frac{h_1 + h_2}{h_1} g.$$

Tím dostaneme

$$f m_1 g < f' m_1 \frac{h_1 + h_2}{h_1} g.$$

Z nerovnice plyne

$$f' > \frac{h_1}{h_1 + h_2} f.$$

**3 body**

V druhém případě je velikost třecí síly mezi kvádrů naopak větší než velikost třecí síly mezi soustavou kvádrů a podložkou:

$$f m_2 g > f' (m_1 + m_2) g.$$

Stejným postupem dostaneme

$$f' < \frac{h_2}{h_1 + h_2} f.$$

Pro hledaný součinitel  $f'$  smykového tření platí obě podmínky, tj.

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} f < f' < \frac{h_2}{h_1 + h_2} f,$$

číselně

$$0,15 < f' < 0,20.$$

**3 body**

- c) V neinerciální vztažné soustavě spojené s dolním kvádrem můžeme na horní kvádr vyvolat setrvačnou sílu, jejíž velikost je nejvýše rovna velikosti třecí síly, která na horní kvádr působí. V tomto krajním případě platí

$$m_1 a_{\max} = f m_1 g$$

pro nižší kvádr nahoře, resp.

$$m_2 a_{\max} = f m_2 g$$

pro vyšší kvádr nahoře. V obou případech dostaneme stejný výsledek

$$a_{\max} = f g = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**2 body**

- 4.a) Hmotnost každého řetězu je přímo úměrná jeho délce. Proto platí

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Z rovnice plyne

$$m_2 = \frac{l_2}{l_1} m_1 = 1,05 \text{ kg}.$$

Podobně z rovnice

$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{l_3}{l_1}$$

dostaneme

$$l_3 = \frac{m_3}{m_1} l_1 = 2,60 \text{ m}.$$

**2 body**

- b) Během zdvínání řetězu velikost síly nejprve přímo úměrně roste s hmotností visící části řetězu, a tím přímo úměrně s výškou horního konce řetězu. Od okamžiku, kdy se celý řetěz ocitne nad zemí, zůstává velikost síly konstantní. Po zavěšení třetího řetězu zůstává jeho část na podlaze. Velikosti konečných sil jsou:

$$F_1 = m_1 g = 5,9 \text{ N},$$

$$F_2 = m_2 g = 10,3 \text{ N},$$

$$F_3 = \frac{h_0}{l_3} m_3 g = 14,7 \text{ N}.$$

**3 body**

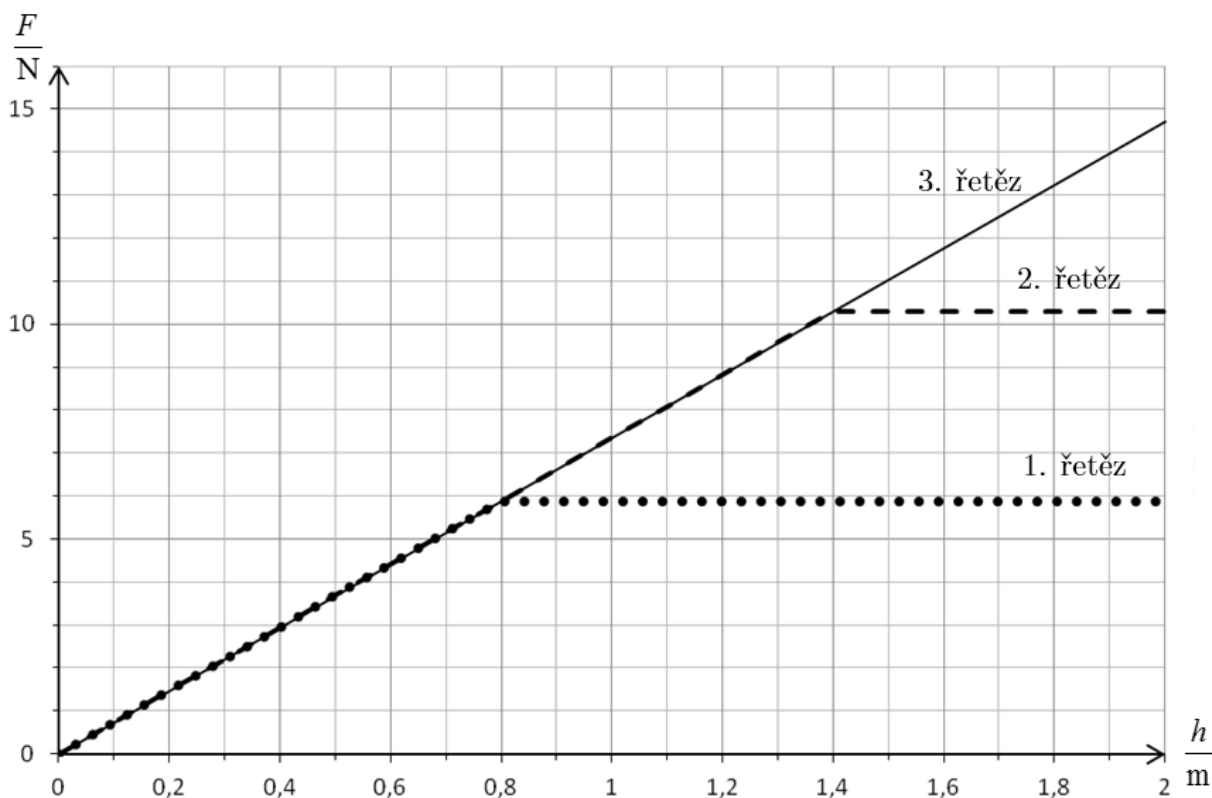
- c) Obsah plochy pod grafem určuje vykonanou práci nutnou ke zdvižení řetězu neboli potenciální energii řetězu vzhledem k zemi. Platí:

$$W_1 = E_{p1} = \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 5,9 + (2 - 0,8) \cdot 5,9 \right] \text{ J} = 9,4 \text{ J},$$

$$W_2 = E_{p2} = \left[ \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 10,3 + (2 - 1,4) \cdot 10,3 \right] \text{ J} = 13 \text{ J},$$

$$W_3 = E_{p3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 14,7 \text{ J} = 15 \text{ J}.$$

**3 body**



Obr. 3

- d) Po uvolnění řetězu bez ohledu na jeho délku padá každý článek volným pádem, během něhož články na sebe vzájemně nepůsobí. Velikost rychlosti dopadu posledního článku každého řetězu bude stejná a získáme ji např. ze ZZME pro poslední článek. Označíme-li hmotnost článku  $m_0$ , platí:

$$m_0 g h_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Z rovnice plyne

$$v = \sqrt{2gh_0} = 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**2 body**

- 5.a) Velikost tahové síly automobilu je rovna velikosti výslednice síly valivého odporu a odporové síly vzduchu, které působí proti pohybu. Pro výkon tahové síly platí

$$P_0 = (F_v + kv_0^2) v_0.$$

Ze vztahu plyne

$$k = \frac{P_0 - F_v}{v_0^2} = \frac{P_0}{v_0^3} - \frac{F_v}{v_0^2} = 0,96 \text{ N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2} = 0,96 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

**2 body**

- b) Velikost tahové síly automobilu je rovna velikosti výslednice síly valivého odporu, odporové síly vzduchu a složky tíhové síly ve směru nakloněné roviny, které působí proti pohybu. Výkon tahové síly v závislosti na rychlosti pak je

$$P(v) = \left( F_v + kv^2 + mg \frac{h}{s} \right) v.$$

Graf sestojíme podle tabulky, která udává vypočtený výkon pro zvolené velikosti rychlosti:

$\frac{v}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$	0	2,78	5,56	8,33	11,1	13,9	16,7	19,4	22,2	25,0	27,8	30,6	33,3
$\frac{P}{\text{kW}}$	0	4,1	8,4	12,8	17,7	23,1	29,0	35,7	43,3	51,9	61,5	72,5	84,7

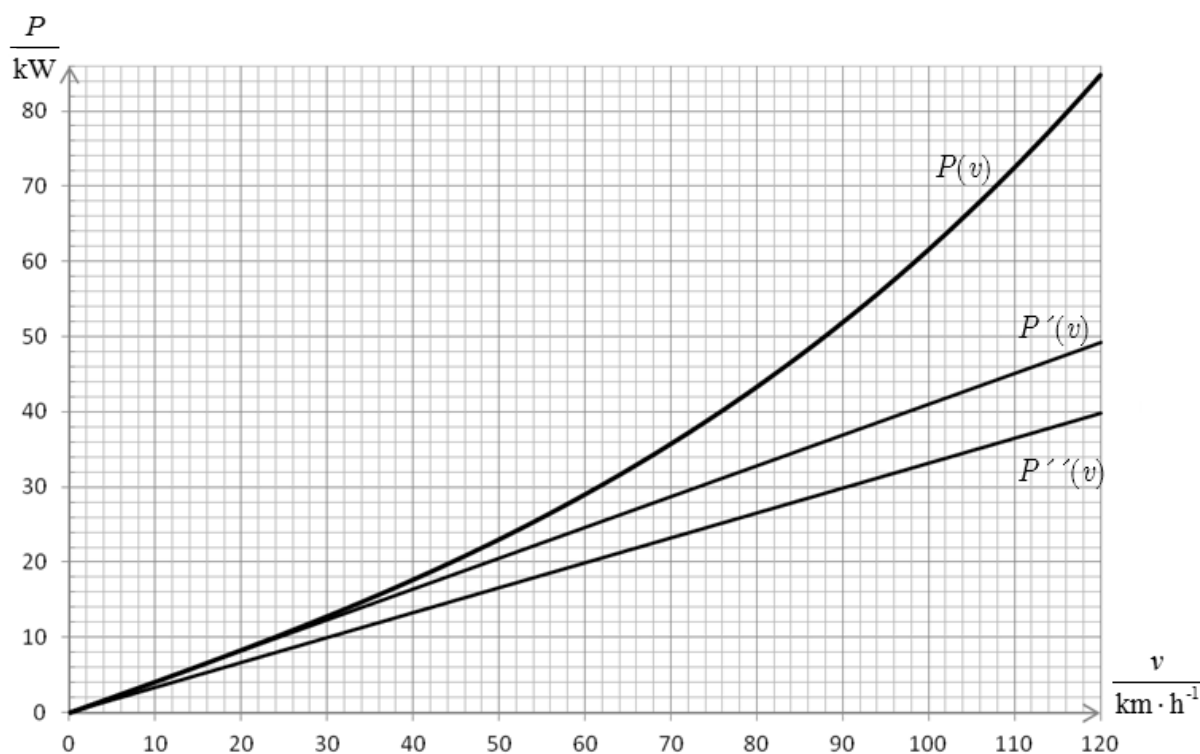
**5 bodů**

Grafy dalších závislostí splňují rovnice

$$P'(v) = \left( F_v + mg \frac{h}{s} \right) v,$$

$$P''(v) = mg \frac{h}{s} v.$$

Obě závislosti jsou přímé úměrnosti, stačí spojit přímkou počátek např. s bodem určeným „souřadnicemi“  $P'(90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) = 36,9 \text{ kW}$ ,  $P''(90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) = 29,9 \text{ kW}$ .

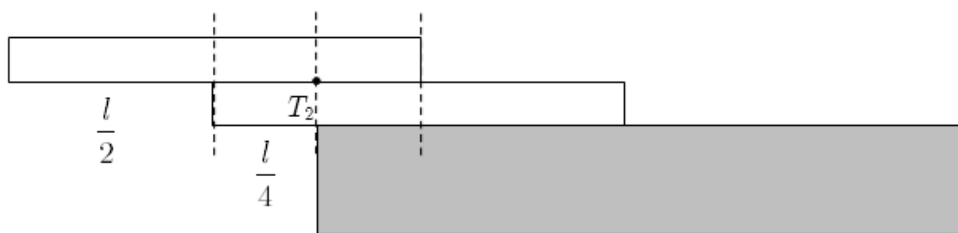


Obr. 4

**2 body**

c) Z grafu vyčteme velikost maximální rychlosti  $v_{\text{max}} = 104 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . **1 bod**

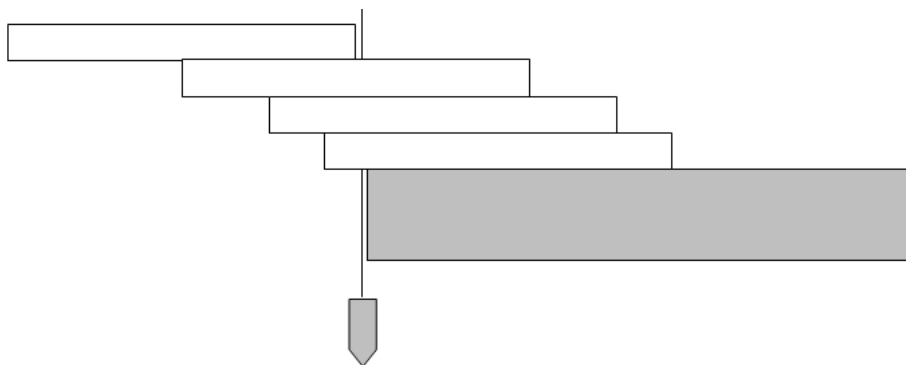
6.a) Horní kvádr vysuneme vzhledem ke spodnímu tak, že se ještě nezvrátí. Přesah horního kvádru vzhledem ke spodnímu je  $\frac{l}{2}$ , čímž jeho těžiště bude nad hranou spodního kvádru. Poté soustavu obou kvádrů vysuneme přes hranu stolu tak, že se ještě nezvrátí. V této poloze je těžiště  $T_2$  soustavy obou kvádrů nad hranou stolu. Dolní kvádr přesahuje přes hranu o  $\frac{l}{4}$ , proto celkový přesah horního kvádru je  $\frac{3}{4}l$ .



Obr. 5

**3 body**

- b) Dáme tři kvádry na sebe a vysunujeme je postupně odshora podle předchozího návodu. Experimentálně zjistíme, že tři kvádry ke splnění úkolu ještě nepostačují, ale již se čtyřmi lze požadovanou šikmou věž postavit (obr. 6).



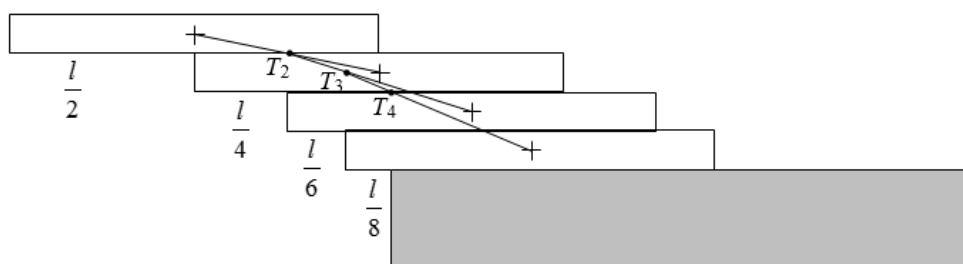
Obr. 6

**3 body**

- c) Z úkolu 1) plyne, že se první kvádr posunul o  $\frac{l}{2}$ , druhý o  $\frac{l}{4}$ . Po přidání třetího kvádru se spojnice těžiště  $T_2$  soustavy dvou horních kvádrů a těžiště třetího kvádru rozdělí v opačném poměru jejich hmotností, tj. v poměru 1:2. Těžiště se tak posune o třetinu z  $\frac{l}{2}$ , tj. o  $\frac{l}{6}$ . Přidáním čtvrtého kvádru se těžiště posune o čtvrtinu z  $\frac{l}{2}$ , tj. o  $\frac{l}{8}$ . Celkový maximální přesah pro 4 kvádry má hodnotu

$$\frac{l}{2} + \frac{l}{4} + \frac{l}{6} + \frac{l}{8} = \frac{25}{24}l.$$

Ve skutečnosti z důvodu stability věže je nutné u každého přesahu ponechat nepatrnou rezervu, přesto při praktickém provedení lze požadovaného cíle dosáhnout.



Obr. 7

**4 body**

7.a) Souřadnice spočteme podle vzorců

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2,$$

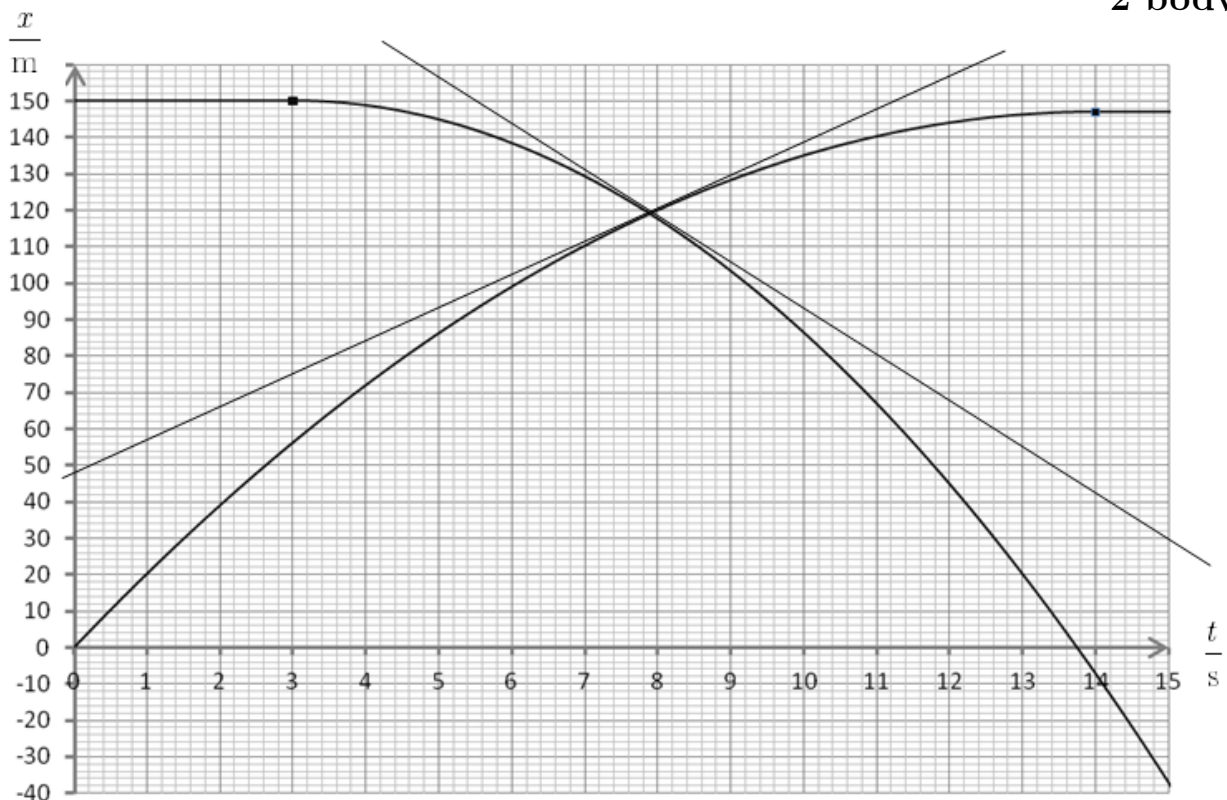
$$x_2 = s_0 \quad \text{pro } 0 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s},$$

$$x_2 = s_0 - \frac{1}{2} a_2 (t - t_0)^2 \quad \text{pro } 3 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s},$$

kde  $s_0 = 150 \text{ m}$ ,  $t_0 = 3 \text{ s}$ ,  $a_1 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $a_2 = 2,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$\frac{t}{\text{s}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{x_1}{\text{m}}$	0	20	39	56	72	86	99	110	120	128	135	140	144	146	147	147
$\frac{x_2}{\text{m}}$	150	150	150	150	149	145	138	129	118	103	86	67	45	20	-7	-37

2 body



Obr. 8

2 body

b) Z grafu vyčteme  $t_s = 7,9 \text{ s}$  a  $x_s = 119 \text{ m}$ .

1 bod

c) Sestrojení tečen a určení souřadnic rychlostí pomocí tečen:

$$v_{x1} = \frac{160 - 48}{12,3 - 0} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 9,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{x2} = \frac{30 - 160}{15,0 - 4,7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -12,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

Velikosti rychlostí určené z časových rovnic pohybu:

$$v_1 = v_0 - a_1 t_s = 9,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 = a_2 (t_s - t_0) = 12,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V daném provedení se hodnoty získané konstrukcí liší od hodnot získaných z kinematických vzorců nejvýše o 0,8 %.

2 body