Řešení úloh školního kola 58. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie G – Archimédiáda

Autoři úloh: D. Kaštilová (1, 4), J. Thomas (2, 3), B. Vlach (5)

FO58G1–1: Pejsek s kočičkou na výletě

Označíme si zadané veličiny a dopočítáme chybějící údaje:
$v_1 = 8\,\mathrm{km/h}$, $t_1 = 30\,\mathrm{min} = 0{,}5\,\mathrm{h}$, $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 4\,\mathrm{km}$,
$v_2 = 0\,\mathrm{km/h}$, $t_2 = 12\,\mathrm{min} = 0{,}2\,\mathrm{h}$, $s_2 = 0\,\mathrm{km}$,
$v_3 = 20\,\mathrm{km/h}$, $s_3 = 6\,\mathrm{km}$,

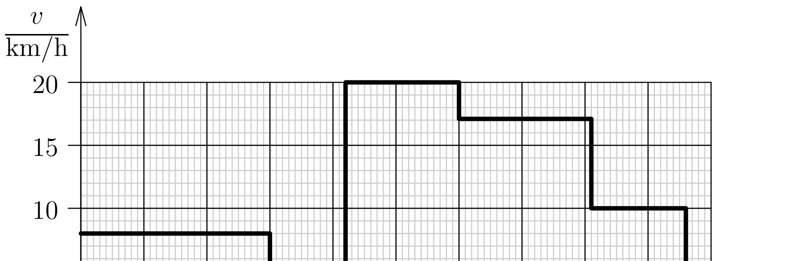
$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = 0{,}3\,\mathrm{h} = 18\,\mathrm{min},$$

$s_4 = s_3 = 6\,\mathrm{km}$, $t_4 = t_3 + 3\,\mathrm{min} = 21\,\mathrm{min} = 0{,}35\,\mathrm{h}$,

$$v_4 = \frac{s_4}{t_4} \doteq 17{,}1\,\mathrm{km/h},$$

$v_5 = 10\,\mathrm{km/h}$, $t_5 = 15\,\mathrm{min} = 0{,}25\,\mathrm{h}$, $s_5 = v_5 \cdot t_5 = 2{,}5\,\mathrm{km}$. **4 body**

a) Graf závislosti velikosti rychlosti pejska na čase je na obr. 1.



Obr. 1: Graf k řešení úlohy 1 **3 body**

b) Celkovou dráhu pejska určíme buď výpočtem nebo z grafu (v tomto případě je nutné osu času označit v hodinách); $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 18{,}5\,\mathrm{km}$.
1 bod

c) Celková doba pohybu $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 96\,\mathrm{min} = 1{,}6\,\mathrm{h}$. Průměrná rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} \doteq 11{,}6\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

FO58G1–2: Horská lavina

a) Objem sněhu je $8\,\mathrm{m} \times 150\,\mathrm{m} \times 0{,}6\,\mathrm{m} = 720\,\mathrm{m}^3$. **1 bod**

b) Hmotnost sněhu vychází $m = \varrho \cdot V = 500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 720\,\mathrm{m}^3 = 360\,\mathrm{t}$. **1 bod**
Bylo by tedy potřeba $n = 360\,\mathrm{t}/5\,\mathrm{t} = 72\,\mathrm{aut}$. **1 bod**

c) Fréza se záběrem 2 m musí šířku silnice 8 m projet 4krát, ujede $4 \times 150\,\mathrm{m} = 600\,\mathrm{m}$. **1 bod**

Při rychlosti 0,2 m/s jí to bude trvat dobu

$$t = \frac{600\,\mathrm{m}}{0{,}2\,\mathrm{m/s}} = 3\,000\,\mathrm{s} = 50\,\mathrm{minut}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Prvních 200 m ujela fréza za čas

$$t_1 = \frac{200\,\mathrm{m}}{0{,}2\,\mathrm{m/s}} = 1\,000\,\mathrm{s}.$$

Poté 20 minut opravy zabere čas $t_2 = 20 \times 60\,\mathrm{s} = 1\,200\,\mathrm{s}$. Zbývajících $600\,\mathrm{m} - 200\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}$ pak ujede rychlostí 0,1 m/s za čas

$$t_3 = \frac{400\,\mathrm{m}}{0{,}1\,\mathrm{m/s}} = 4\,000\,\mathrm{s}.$$

Celkem bude odklízení trvat dobu

$$t' = t_1 + t_2 + t_3 = 1\,000\,\mathrm{s} + 1\,200\,\mathrm{s} + 4\,000\,\mathrm{s} = 6\,200\,\mathrm{s} = 103\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}. \qquad \textbf{4 body}$$

FO58G1–3: Sklenička na vodě

a) Při plování skleničky jsou v rovnováze tíhová a vztlaková síla. Platí tedy

$$mg = h_x S \varrho_\mathrm{v} g,$$

kde $m = 150\,\mathrm{g} = 0{,}15\,\mathrm{kg}$ je hmotnost kuličky, $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ hustota vody a $S = 25\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}002\,5\,\mathrm{m}^2$ plocha dna skleničky. Odtud pro hloubku dna skleničky pod hladinou h_x dostáváme

$$h_x = \frac{m}{S\varrho_\mathrm{v}} = \frac{0{,}15\,\mathrm{kg}}{0{,}002\,5\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}06\,\mathrm{m} = 6{,}0\,\mathrm{cm}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) Do skleničky můžeme nejvýše nasypat kuličky o hmotnosti m_x; podmínka rovnováhy pak bude

$$(m + m_x)\, g = hS\varrho_\mathrm{v} g,$$

kde $h = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ je výška skleničky. Odtud

$$m_x = hS\varrho_\mathrm{v} - m = 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}002\,5\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} - 0{,}15\,\mathrm{kg} = 0{,}10\,\mathrm{kg}. \qquad \textbf{3 body}$$

Objem skleněných kuliček pak pomocí hustoty skla $2\,500\,\mathrm{kg/m^3}$ vychází

$$V = \frac{m_x}{\varrho_\mathrm{s}} = \frac{0{,}10\,\mathrm{kg}}{2\,500\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}000\,040\,\mathrm{m}^3 = 40\,\mathrm{cm}^3 = 40\,000\,\mathrm{mm}^3.$$

Podle zadání je objem jedné kuličky $V_1 = 33{,}5\,\mathrm{mm}^3$. Aniž by se potopila, můžeme do skleničky nasypat

$$n = \frac{V}{V_1} = \frac{40\,000\,\mathrm{mm}^3}{33{,}5\,\mathrm{mm}^3} = 1\,194$$

skleněných kuliček. **4 body**

Poznámka: K počtu skleněných kuliček lze dospět i jinou cestou, např. určit hmotnost jedné kuličky $m_1 = V_1 \varrho_\mathrm{s} = 0{,}000\,000\,033\,5\,\mathrm{m}^3 \cdot 2\,500\,\mathrm{kg/m}^3 = 0{,}000\,083\,75\,\mathrm{kg}$. Potom $n = m_x/m_1 = 1\,194$ skleněných kuliček.

FO58G1–4: Chlazení nápoje v řece

a) Hmotnost nápoje v kanystru vypočítáme z objemu $V_1 = 4{,}8\,\mathrm{l} = 0{,}004\,8\,\mathrm{m}^3$ a hustoty $m_1 = \varrho V_1 = 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 0{,}004\,8\,\mathrm{m}^3 = 4{,}8\,\mathrm{kg}$. Kanystr s nápojem má celkovou hmotnost $m = m_0 + m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg} + 4{,}8\,\mathrm{kg} = 6{,}8\,\mathrm{kg}$. **2 body**

Na kanystr s nápojem o vnějším objemu $V_0 = 5\,\mathrm{l} = 0{,}005\,\mathrm{m}^3$ působí ve vodě vztlaková síla

$$F_\mathrm{vz} = V_0 \varrho g = 0{,}005\,\mathrm{m}^3 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 50\,\mathrm{N}$$

a tíhová síla $F_\mathrm{G} = mg = 6{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 68\,\mathrm{N}$. Na tyč v bodě A působí síla $F_1 = F_\mathrm{G} - F_\mathrm{vz} = 68\,\mathrm{N} - 50\,\mathrm{N} = 18\,\mathrm{N}$. **2 body**

Na tyč v bodě B působí síla $F_2 = m_\mathrm{k} g$, kde m_k je hmotnost kamene. Rameno síly F_1 je $d_1 = d/3 = 0{,}9\,\mathrm{m}/3 = 0{,}3\,\mathrm{m}$, rameno síly F_2 je $d_2 = 2d/3 = 2 \cdot 0{,}9\,\mathrm{m}/3 = 0{,}6\,\mathrm{m}$; d je délka tyče. Moment síly F_1 je $M_1 = F_1 d_1 = 5{,}4\,\mathrm{N \cdot m}$ a v rovnováze platí $M_1 = M_2$. Pro sílu F_2 a hmotnost m_k dostáváme

$$F_2 = \frac{M_2}{d_2} = \frac{M_1}{d_2} = \frac{5{,}4\,\mathrm{N \cdot m}}{0{,}6\,\mathrm{m}} = 9\,\mathrm{N}, \qquad m_\mathrm{k} = \frac{F_2}{g} = \frac{9\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{N/kg}} = 0{,}9\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

b) Hmotnost nápoje o objemu $V_2 = 3{,}9\,\mathrm{l} = 0{,}003\,9\,\mathrm{m}^3$ bude nyní $m_2 = \varrho V_2 = 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 0{,}003\,9\,\mathrm{m}^3 = 3{,}9\,\mathrm{kg}$. Kanystr s nápojem má celkovou hmotnost $m' = m_0 + m_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg} + 3{,}9\,\mathrm{kg} = 5{,}9\,\mathrm{kg}$.

Vztlaková síla působící na kanystr s nápojem se nezmění, tíhová síla bude $F'_\mathrm{G} = m'g = 5{,}9\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 59\,\mathrm{N}$. Na tyč v bodě A působí síla $F'_1 = F'_\mathrm{G} - F_\mathrm{vz} = 59\,\mathrm{N} - 50\,\mathrm{N} = 9\,\mathrm{N}$. Namísto do bodu B můžeme kámen na druhé straně tyče umístit do vzdálenosti x od podpěrného kamene, pro kterou platí

$$x = \frac{F'_1 d_1}{F_2} = \frac{9\,\mathrm{N} \cdot 0{,}3\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{N}} = 0{,}3\,\mathrm{m},$$

tj. do vzdálenosti $y = d_2 - x = 0{,}6\,\mathrm{m} - 0{,}3\,\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{cm}$ od konce tyče B.

3 body

FO58G1–5: Experiment – hmotnost, objem a hustota zrnka hrachu

Vlastnosti hrachu mohou kolísat podle druhu a balení, počet zrnek v hmotnosti 200 g může vycházet větší než 1000, hustota zrnek hrachu okolo 1,6 g/cm^3 (řešitelé během měření snadno zjistí, že je větší než hustota vody). Hmotnost zrnka může vycházet řádově asi do 0,2 g a objem řádově 0,1 cm^3. Doporučujeme tolerovat i postup vycházející z napočítání určitého (dostatečně vysokého) počtu zrnek a určení celkové hmotnosti tohoto počtu namísto navážení určitého množství hrachu a spočítání zrnek v tomto množství.