Řešení úloh krajského kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autor úloh: J. Thomas

1.a) Pro výšku, ve které se nachází koule nad zemí, platí:

$$y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

a pro její vzdálenost od okraje kruhu pak: $x = v_0 t \cos\alpha$. (2)

Dosazením do rovnice (1) za $y = H$ dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t \sin\alpha + (H - h) = 0$$

s kořeny $t_{1,2} = \dfrac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2g\,(H-h)}}{g}$, číselně $t_1 = 1{,}49$ s a $t_2 =$ $= 0{,}34$ s. Druhý kořen platí při stoupání koule, první při jejím klesání.

4 body

b) Z rovnice (2) vyjádříme čas $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ a dosadíme do rovnice (1). Položíme-li $y = 0$, dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x:

$$y = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\!\alpha} = 0$$

s kořeny $x_{1,2} = \dfrac{v_0^2 \cos^2\!\alpha \left(\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\!\alpha + \dfrac{2gh}{v_0^2 \cos^2\!\alpha}} \right)}{g}$. Číselně vyhovuje kladný kořen $x = 21{,}8$ m.

3 body

c) Velikost rychlosti dopadu určíme ze zákona zachování energie:

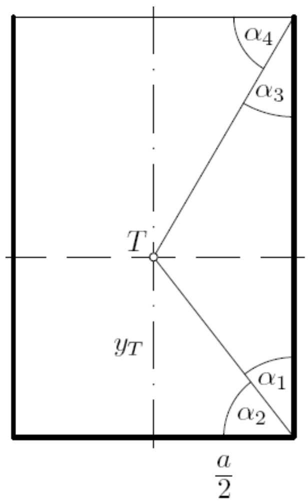
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2$$

odtud $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, číselně $v = 15{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Se svislým směrem bude tato rychlost svírat úhel β, pro který platí

$$\sin\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 44{,}4°.$$

3 body

2.



Nejprve najdeme polohu těžiště nádoby (obr. R1). Těžiště bude ležet na ose nádoby procházející středem jejího dna ve výšce

$$y_Y = \frac{4 \cdot 1{,}5a^2 \cdot 0{,}75a}{a^2 + 4 \cdot 1{,}5a^2} = \frac{9}{14} a.$$

Nádoba se skácí poté, co spojnice těžiště se středem hrany kácení projde svislou polohou (obr. R2).

Obr. R1

5 bodů

a) Nádoba stojí na základně tvaru čtverce. Pak

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{0{,}5a}{y_T} = \frac{7}{9} \doteq 0{,}78, \qquad \alpha_1 \doteq 38°.$$

b) Nádoba leží na boku se dnem blíže k dolnímu konci nakloněné roviny. Pak

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_T}{0{,}5a} = \frac{9}{7} \doteq 1{,}29, \qquad \alpha_2 \doteq 52°.$$

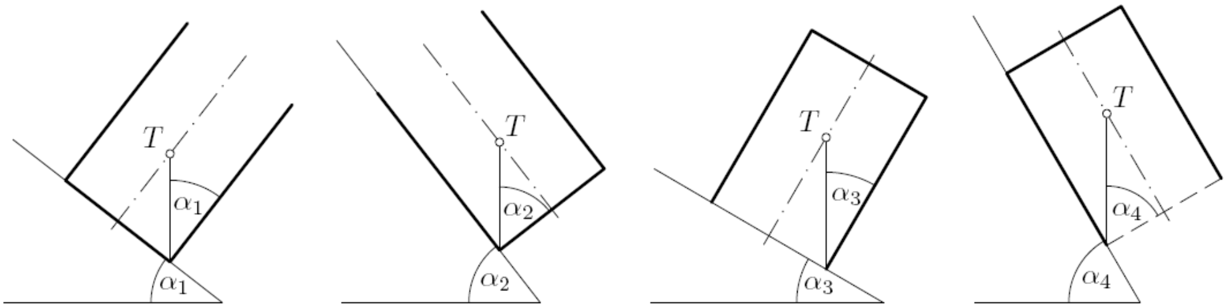
c) Nádoba stojí tak, že dno tvaru čtverce je nahoře. Pak

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{0{,}5a}{1{,}5a - y_T} = \frac{7}{12} \doteq 0{,}58, \qquad \alpha_3 \doteq 30°.$$

d) Nádoba leží na boku se dnem blíže k hornímu konci nakloněné roviny. Pak

$$\operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{1{,}5a - t_T}{0{,}5a} = \frac{12}{7} \doteq 1{,}71, \qquad \alpha_4 \doteq 60°.$$

Tento případ ale nemůže nastat, protože $\operatorname{tg}\alpha > f$. Nádoba bude po nakloněné rovině klouzat a nemůže se skácet. **5 bodů**



Obr. R2 a) b) c) d)

3. a) Největší zrychlení, s jakým se Martin může rozbíhat je $a = f_1 g$, při snaze o větší zrychlení by mu boty prokluzovaly. Aby získal rychlost v_0, musí ustoupit do vzdálenosti

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2gf_1} = 8{,}2\ \text{m}.$$

Má-li být doba návratu t_n do vzdálenosti s co nejmenší, musí první polovinu této doby zrychlovat se zrychlením a a druhou polovinu se stejným zrychlením zpomalovat. Platí tedy

$$\frac{1}{2} f_1 g \frac{t_\text{n}^2}{4} + \frac{1}{2} f_1 g \frac{t_\text{n}^2}{4} = \frac{v_0^2}{2gf_1} \quad \Rightarrow \quad t_\text{n} = \frac{v_0\sqrt{2}}{f_1 g}.$$

Celková doba návratu a rozbíhání tedy bude minimálně

$$t_1 = t_\text{n} + \frac{v_0}{f_1 g} = \frac{v_0}{f_1 g}\left(1 + \sqrt{2}\right) = 9{,}8\ \text{s}.$$ **4 body**

b) Klouzání napříč přes silnici je rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením o velikosti $f_2 g$. Pro jeho dráhu platí

$$L = v_0 t_2 - \frac{1}{2} f_2 g t_2^2.$$

Úloze vyhovuje menší kořen této kvadratické rovnice

$$t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2f_2 gL}}{f_2 g} = 3{,}1\ \text{s}.$$

4 body

c) Martin se na druhém okraji silnice zastaví. Platí tedy

$$L = \frac{v_0^2}{2f_3 g} \quad \Rightarrow \quad f_3 = \frac{v_0^2}{2Lg} = 0{,}081.$$

2 body

4.a) Z rovnosti vztlakové a tíhové síly

$$\pi\frac{d^2}{4}h\rho_v g = (m_1 + m_2)\,g \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4\,(m_1 + m_2)}{\pi d^2 \rho_v} = 7{,}01\ \text{cm}.$$

2 body

b) Výška parafínové části svíčky: $h_1 = \dfrac{4m_1}{\pi d^2 \rho_1} = 7,20$ cm,

výška hliníkového válečku: $h_2 = \dfrac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} = 0{,}22$ cm. **2 body**

c) Z rovnosti vztlakové a tíhové síly v okamžiku, kdy hladina vody sahá k okraji svíčky

$$\pi\frac{d^2}{4}\,(h_s + h_2)\,\rho_v g = \pi\frac{d^2}{4}\,(h_s\rho_1 + h_2\rho_2)\,g$$

určíme současnou výšku parafínové části svíčky

$$h_s = h_2\frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = \frac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = 3{,}4\ \text{cm}.$$

Hmotnost parafínové části tedy bude

$$m_s = \pi\frac{d^2}{4}h_s\rho_1 = \pi\frac{d^2}{4}\rho_1 h_2\frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} =$$

$$= \pi\frac{d^2}{4}\rho_1\frac{4m_2}{\pi d^2\rho_2} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}m_2 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_v}{\rho_v - \rho_1} = 53{,}5\ \text{g}$$

Uhořelo tedy 112,2 g − 53,5 g = 58,7 g parafínu. Proces hoření trval 11,7 h.

3 body

d) Protože voda parafín ochlazuje, začne svíčka vyhořívat zevnitř. Přitom se bude zmenšovat její tíha a hladina vody bude sahat stále k hornímu okraji svíčky. Po 15 hodinách zbude ještě $m_3 = 112{,}2\ \text{g} - 75\ \text{g} = 37{,}2$ g parafínu. Označme výšku parafínové části svíčky h_3.

Z rovnosti vztlakové a tíhové síly $\pi\dfrac{d^2}{4}\,(h_3 + h_2)\,\rho_v g = (m_2 + m_3)\,g$ vyjádříme

$$h_3 = \frac{4\,(m_2 + m_3)}{\pi d^2 \rho_v} - h_2 = \frac{4\,(m_2 + m_3)}{\pi d^2 \rho_v} - \frac{4m_2}{\pi d^2 \rho_2} = 2{,}50\ \text{cm}.$$

Svíčka tedy bude stále hořet a její plamen bude schován uvnitř její parafínové části. **3 body**