

Řešení úloh krajského kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autor úloh: J. Thomas

- 1.a) Doba letu střely od okamžiku výstřelu do zásahu označíme t . V okamžiku výstřelu se husa nachází ve vzdálenosti $s = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$, měřené ve vodorovném směru. Za dobu t uletí ještě vzdálenost ut . Platí tedy

$$\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} + ut = v_0 t \cos\alpha. \quad (1)$$

Střela za dobu t dosáhne výšky

$$h = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) vyloučíme čas: $t = \frac{h}{(v_0 \cos\alpha - u) \operatorname{tg}\alpha}$.

$$h = v_0 \frac{h \sin\alpha}{(v_0 \cos\alpha - u) \operatorname{tg}\alpha} - \frac{gh^2}{2(v_0 \cos\alpha - u)^2 \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Po úpravě

$$h = \frac{2(v_0 \cos\alpha - u)^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{g} \left[\frac{v_0 \sin\alpha}{(v_0 \cos\alpha - u) \operatorname{tg}\alpha} - 1 \right] = \frac{2(v_0 \cos\alpha - u) u \operatorname{tg}^2\alpha}{g}.$$

Musí být splněna podmínka: $v_0 \cos\alpha > u$, jinak by střela husu nedostihla.

Číselně: $h = 132$ m.

5 bodů

- b) Ze zákona zachování energie $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$ zjistíme velikost rychlosti střely ve výšce h :

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 - 4(v_0 \cos\alpha - u) u \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Rychlost svírá s vodorovným směrem úhel β , pro který platí:

$$\cos\beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 4(v_0 \cos\alpha - u) u \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Číselně: $v = 140$ m · s⁻¹, $\beta = 58^\circ$.

3 body

- c) Od okamžiku zásahu se tělo husy pohybuje vrhem vodorovným s počáteční rychlostí u . Zasažená husa dopadne na zem ve vzdálenosti

$$\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} + ut + u\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} + u \frac{h}{(v_0 \cos\alpha - u) \operatorname{tg}\alpha} + u\sqrt{\frac{2h}{g}} = 95 \text{ m}$$

od místa, odkud lovec vystřelil.

2 body

- 2.a) Bude-li R odpor ve vnější části obvodu a r vnitřní odpor zdroje, platí pro účinnost přenosu energie v obvodu:

$$\eta = \frac{RI^2}{(r+R)I^2} = \frac{R}{r+R} \Rightarrow R = \frac{r\eta}{1-\eta} \quad (1)$$

a pro tepelný výkon na vnějším odporu

$$P = RI^2 = \frac{RU_e^2}{(r+R)^2} = \frac{U_e^2\eta^2}{R} = \frac{U_e^2\eta(1-\eta)}{r}.$$

Protože $P_1 = \frac{U_e^2\eta_1(1-\eta_1)}{r}$ a $P_2 = \frac{U_e^2\eta_2(1-\eta_2)}{r}$, dostaneme vydělením

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\eta_1(1-\eta_1)}{\eta_2(1-\eta_2)}. \quad (2)$$

Úpravou obdržíme kvadratickou rovnici $P_1\eta_2^2 - P_1\eta_2 + P_2\eta_1(1-\eta_1) = 0$.

Rovnice má dva kořeny: $\eta_2 = \frac{P_1 \pm \sqrt{P_1^2 - 4P_1P_2\eta_1(1-\eta_1)}}{2P_1}$,

po dosazení $\eta_{21} = 0,25$ a $\eta_{22} = 0,75$.

První kořen odpovídá situaci, kdy je $R_2 < r$, druhý situaci, kdy $R_2 > r$.

4 body

- b) Podle (1) odpovídá účinnosti η_1 odpor $R_1 = \frac{r\eta_1}{1-\eta_1} = r$, účinnosti η_{21} odpor $R_{21} = \frac{r\eta_{21}}{1-\eta_{21}} = \frac{r}{3}$ a účinnosti η_{22} odpor $R_{22} = \frac{r\eta_{22}}{1-\eta_{22}} = 3r$.

2 body

Při sériovém zapojení rezistorů $\eta_3 = \frac{R_1 + R_2}{r + R_1 + R_2}$. Pro účinnost dostáváme dvě možné hodnoty $\eta_{31} = 0,57$ a $\eta_{32} = 0,8$. Výkon na rezistorech vyjádříme pomocí vztahu (2): $P_3 = P_1 \frac{\eta_3(1-\eta_3)}{\eta_1(1-\eta_1)}$.

Číselně $P_{31} = 9,8 \text{ W}$ a $P_{32} = 6,4 \text{ W}$.

2 body

- c) Při paralelním zapojení rezistorů $\eta_4 = \frac{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{r + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$. Opět dostáváme dvě

možné hodnoty $\eta_{41} = 0,2$ a $\eta_{42} = 0,43$ a odpovídající výkony $P_{41} = 6,4 \text{ W}$ a $P_{42} = 9,8 \text{ W}$.

2 body

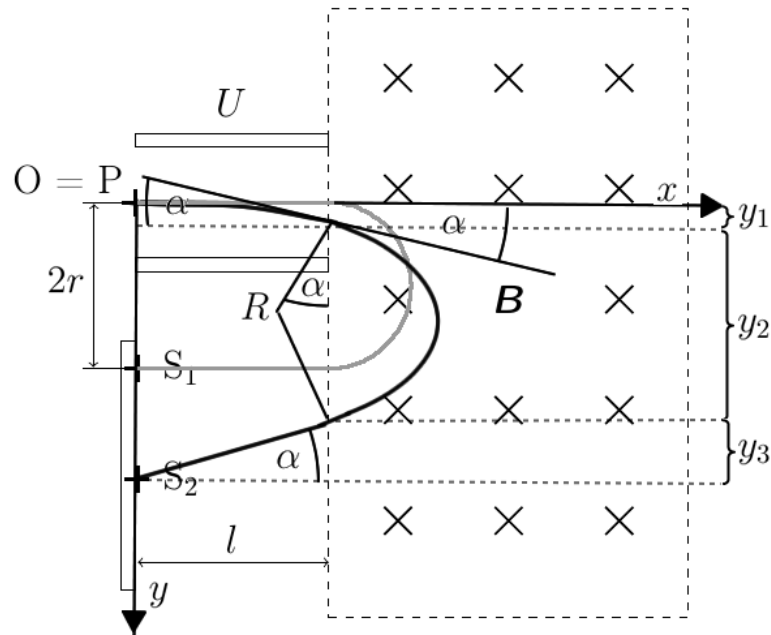
- 3.a) Nebude-li na kondenzátoru napětí, budou se elektrony v magnetickém poli pohybovat po půlkružnici s poloměrem $r = \frac{PS_1}{2}$. Dostředivou silou je síla magnetická, pak

$$Bev_0 = \frac{m_e v_0^2}{r} \Rightarrow B = \frac{m_e v_0}{er} = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ T}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Po vložení napětí na desky kondenzátoru se elektrony mezi deskami pohybují po trajektorii ve tvaru části paraboly a opouští elektrické pole v místě o souřadnici

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{eU}{2m_e d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} = 1,4 \text{ cm}$$

rychlostí, jejíž složky jsou $v_x = v_0$ a $v_y = at = \frac{eUl}{m_e dv_0}$.



Výstupní rychlost \mathbf{v} pak svírá se vstupní rychlostí \mathbf{v}_0 úhel α , pro který platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eUl}{m_e d v_0^2} \Rightarrow \alpha = 19,4^\circ$$

a její velikost je $v = \frac{v_0}{\cos \alpha} = 4,24 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

V magnetickém poli se pak elektrony pohybují stálou rychlostí v po části kružnice s poloměrem

$$R = \frac{m_e v}{eB} = \frac{\frac{m_e v_0}{\cos \alpha}}{e \frac{m_e v_0}{er}} = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{\overline{PS_1}}{2 \cos \alpha} = 3,7 \text{ cm.}$$

Z magnetického pole elektrony vystoupí ve vzdálenosti $y_2 = 2R \cos \alpha = 2r = \overline{PS_1} = 7 \text{ cm}$, která nezávisí na napětí mezi deskami kondenzátoru, a dále se pohybují po přímce, která svírá s rovinou desek kondenzátoru úhel α a na stínítku dopadnou ve vzdálenosti

$$\begin{aligned} \overline{PS_2} = y_1 + y_2 + y_3 &= \frac{eU}{2m_e d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} + 2R \cos \alpha + l \cdot \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{eU}{2m_e d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} + 2r + \frac{eUl^2}{m_e d v_0^2} = \frac{3eU}{2m_e d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} + 2r = 0,112 \text{ m} = 11,2 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Elektrony tedy dopadají na stínítko ve vzdálenosti 11,2 cm od bodu P rychlostí o velikosti $v = 4,24 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod úhlem $\alpha = 19,4^\circ$ (měřeno od kolmice ke stínítku).

5 bodů

- b) Napětí U_1 může být nejvýše takové, aby elektrony ještě procházely mezi deskami a nedopadaly na jednu z nich. V tomto případě platí

$$y'_1 = \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{eU_1}{2m_e d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} \Rightarrow U_1 = \frac{m_e d^2 v_0^2}{el^2} = 51,2 \text{ V.}$$

Pak $\text{tg } \beta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eU_1 l}{m_e d v_0^2} \Rightarrow \beta = 36,7^\circ$, velikost rychlosti dopadu $v_1 = \frac{v_0}{\cos \beta} = 5,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a vzdálenost

$$\overline{PS}_3 = y'_1 + y'_2 + y'_3 = \frac{d}{2} + \overline{PS}_1 + \frac{eU_1 l^2}{m_e d v_0^2} = 3,0 \text{ cm} + 7,0 \text{ cm} + 6,0 \text{ cm} = 16,0 \text{ cm.}$$

Aby elektrony dopadaly ještě na stínítko, musí být napětí U_1 menší než 51,2 V. Elektrony budou dopadat nejdále do bodu S_3 vzdáleném od bodu P o $\overline{PS}_3 = 16,0 \text{ cm}$, rychlostí o velikosti $v_1 = 5,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která svírá s kolmicí ke stínítku úhel $\beta = 36,7^\circ$. **4 body**

- 4.a) Protože ampérmetrem má procházet minimální proud, musí být frekvence nastavena na nejnižší hodnotu a stejně tak kapacity kondenzátorů, zatímco odpor musí být nastaven na hodnotu největší. **1 bod**

Nejprve určíme impedanci Z_2 paralelního spojení druhého kondenzátoru a cívky. Protože napětí je na obou prvcích stejné a na kapacitě proud předbíhá napětí o $\frac{\pi}{2}$ (obr. 2), platí

$$\sqrt{I_R^2 + I_{C_2}^2} = \frac{U_2}{Z_2} = U_2 \sqrt{\frac{1}{R^2} + (2\pi f C_2)^2} \Rightarrow \frac{1}{Z_2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (2\pi f C_2)^2}$$

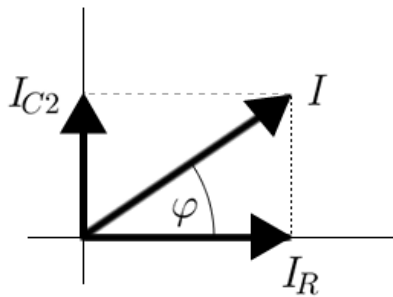
$$\Rightarrow Z_2 = \frac{R}{\sqrt{(1 + (2\pi f R C_2)^2)}} = 477 \Omega.$$

Proud předbíhá napětí o úhel φ , pro který platí $\text{tg } \varphi = \frac{R}{X_C} = R\omega C_2$, tedy $\varphi = 17,4^\circ$. **4 body**

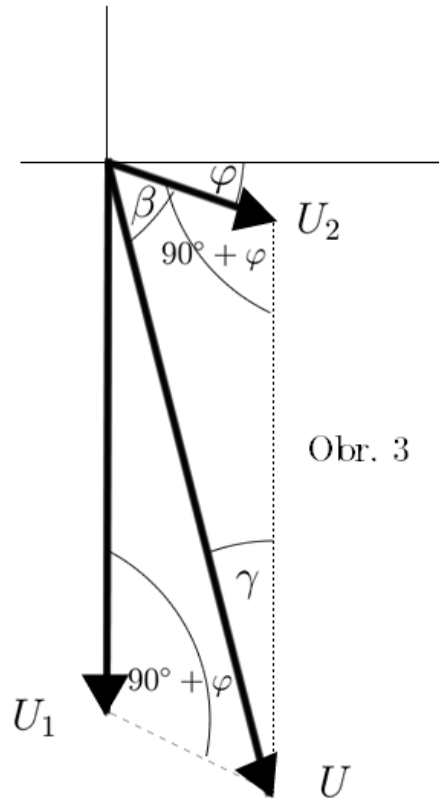
Impedance prvního kondenzátoru $Z_1 = X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = 3183 \Omega$, proud předbíhá napětí o $\frac{\pi}{2}$, fázory napětí na paralelním spojení odporu s kondenzátorem a na prvním kondenzátoru spolu svírají úhel $90^\circ - \varphi = 72,6^\circ$ (obr. 3). Pak podle kosinové věty celková impedance

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1 Z_2 \cos(90^\circ + \varphi)} = 3357 \Omega.$$

Minimální hodnota proudu je pak $I_{\min} = \frac{U}{Z} = 2,98 \text{ mA}$. **3 body**



Obr. 2



Obr. 3

Fázové posunutí mezi napětím a proudem bude $\beta = 90^\circ - \gamma$. Úhel γ určíme pomocí sinové věty:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin(90^\circ + \varphi)} = \frac{Z_2}{Z} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{Z_2}{Z} \sin(90^\circ + \varphi) = 0,1356 \Rightarrow \gamma = 7,8^\circ \text{ a } \beta = 82,2^\circ.$$

2 body

Řešení symbolickou metodou: $\overline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$, $\frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C_2$.

$$\overline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C_2} = \frac{R}{1 + (R\omega C_2)^2} - j \left[\frac{R^2\omega C_2}{1 + (R\omega C_2)^2} - \frac{1}{\omega C_1} \right],$$

$$Z = \sqrt{\left[\frac{R}{1 + (R\omega C_2)^2} \right]^2 + \left[\frac{R^2\omega C_2}{1 + (R\omega C_2)^2} - \frac{1}{\omega C_1} \right]^2} = 3357 \Omega,$$

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{\frac{R^2\omega C_2}{1 + (R\omega C_2)^2} - \frac{1}{\omega C_1}}{\frac{R}{1 + (R\omega C_2)^2}} = 7 \Rightarrow \beta = 82,2^\circ.$$