Řešení úloh školního kola 57. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E a F

Autoři úloh: J. Jírů (1–13, 15–16), P. Klapková-Dymešová, I. Volf (14)

1. FO57EF1–1: Opožděný výjezd

a) Zpoždění 5 min odpovídá času $5/60\,\mathrm{h} = 1/12\,\mathrm{h}$, namísto plánované rychlosti $90\,\mathrm{km/h}$ pojede řidič rychlostí $100\,\mathrm{km/h}$. Označíme-li t hledaný čas a x jeho číselnou hodnotu v hodinách, tj. $t = x\,\mathrm{h}$, pak porovnáním drah dostaneme rovnici

$$90\left(x + \frac{1}{12}\right) = 100x \qquad \Longrightarrow \qquad 10x = \frac{90}{12} = \frac{30}{4},$$

jejímž řešením vychází $x = 3/4$. Automobil dožene zpoždění v čase $t = 3/4\,\mathrm{h} = 0{,}75\,\mathrm{h}$. **2 body**

Pro uraženou dráhu pak vychází

$$s = vt = 100\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{3}{4}\,\mathrm{h} = 75\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

b) Nyní v rovnici známe čas $t_1 = 30\,\mathrm{min} = 1/2\,\mathrm{h}$ a hledáme rychlost v. Označíme-li y číselnou hodnotu rychlosti v jednotce km/h, tj. $v = y\,\mathrm{km/h}$, pak platí

$$90\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}y$$

a řešením dostaneme

$$90 \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{2}y \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{7}{6} \cdot 90 = 105.$$

Rychlost automobilu musí být $v = 105\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

Odpovídající dráha bude

$$s = vt_1 = 105\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{h} = 52{,}5\,\mathrm{km} \doteq 53\,\mathrm{km}.$$ **1 bod**

c) Podobně jako v části b) nyní hledáme rychlost v', přičemž doba pohybu řidiče je nyní dána jako $t_2 = 60\,\mathrm{km}/v'$. Označíme-li z číselnou hodnotu rychlosti v jednotce km/h, tj. $v' = z\,\mathrm{km/h}$, pak platí

$$90\left(\frac{60}{z} + \frac{1}{12}\right) = 60;$$

řešením dojdeme postupně k hodnotě

$$\frac{60}{z} = \frac{60}{90} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \frac{12}{7} \cdot 60 \doteq 103.$$

Rychlost automobilu musí být $v' = 103\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

Odpovídající čas bude

$$t_2 = \frac{60\,\mathrm{km}}{103\,\mathrm{km/h}} \doteq 0{,}58\,\mathrm{h} \doteq 35\,\mathrm{min}.$$ **1 bod**

2. FO57EF1–2: Jízda v mlze

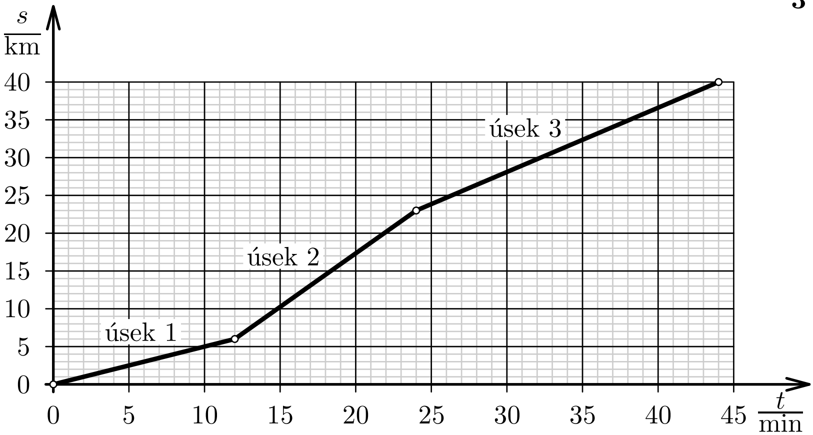
Označme zadané veličiny $v_1 = 30\,\mathrm{km/h}$, $t_1 = 12\,\mathrm{min} = 0{,}2\,\mathrm{h}$, $t_2 = 12\,\mathrm{min} = 0{,}2\,\mathrm{h}$, $s_2 = 17\,\mathrm{km}$, $s_3 = 17\,\mathrm{km}$, $v_3 = 51\,\mathrm{km/h}$.

a) Pro zbývající veličiny na třech úsecích pohybu platí

$$s_1 = v_1 t_1 = 30\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}2\,\mathrm{h} = 6\,\mathrm{km}, \qquad v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{17\,\mathrm{km}}{0{,}2\,\mathrm{h}} = 85\,\mathrm{km/h},$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{17\,\mathrm{km}}{51\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{min}.$$

3 body



Obr. 1: Graf pohybu automobilu

b) Graf je na obr. 1. **3 body**

c) Průměrná rychlost na prvních dvou úsecích vychází

$$v_{\mathrm{p}12} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{6\,\mathrm{km} + 17\,\mathrm{km}}{0{,}2\,\mathrm{h} + 0{,}2\,\mathrm{h}} = 57{,}5\,\mathrm{km/h} \doteq 58\,\mathrm{km/h},$$

na druhých dvou úsecích

$$v_{\mathrm{p}23} = \frac{s_2 + s_3}{t_2 + t_3} = \frac{17\,\mathrm{km} + 17\,\mathrm{km}}{0{,}2\,\mathrm{h} + 1/3\,\mathrm{h}} = 63{,}75\,\mathrm{km/h} \doteq 64\,\mathrm{km/h}.$$

Pro aritmetický průměr rychlostí na prvním a druhém úseku dostáváme

$$\overline{v_{12}} = \frac{1}{2}\,(v_1 + v_2) = \frac{30\,\mathrm{km/h} + 85\,\mathrm{km/h}}{2} = 57{,}5\,\mathrm{km/h} \doteq 58\,\mathrm{km/h},$$

na druhých dvou úsecích

$$\overline{v_{23}} = \frac{1}{2}\,(v_2 + v_3) = \frac{85\,\mathrm{km/h} + 51\,\mathrm{km/h}}{2} = 68\,\mathrm{km/h}.$$

Při shodných časech v prvních dvou úsecích vyšla rovnost mezi průměrnou rychlostí $v_{\mathrm{p}12}$ a aritmetickým průměrem rychlostí $\overline{v_{12}}$. Při shodných drahách se průměrná rychlost $v_{\mathrm{p}23}$ a aritmetický průměr rychlostí $\overline{v_{23}}$ liší.

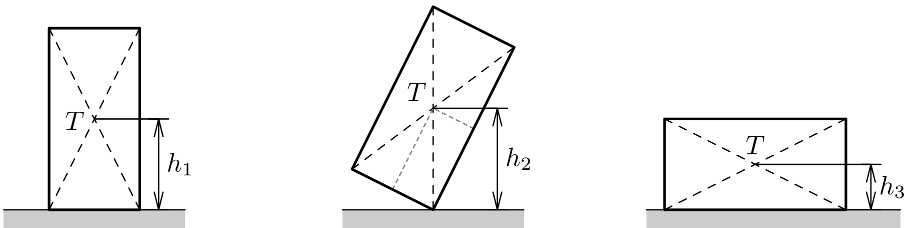
Nalezenou rovnost $v_{\mathrm{p}12} = \overline{v_{12}}$ zdůvodníme. Předpokládejme, že auto urazí dva úseky s_1 a s_2 za dobu t, přičemž doba jízdy na každém z úseků je stejná, to znamená $t_1 = t/2$, $t_2 = t/2$. Pak lze průměrnou rychlost postupně vyjádřit ve tvaru

$$v_{\mathrm{p}12} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t} = \frac{s_1}{2t_1} + \frac{s_2}{2t_2} = \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right),$$

což je aritmetický průměr rychlostí na jednotlivých úsecích. Při dvou shodných drahách a různých časech tento výraz pro průměrnou rychlost nedostaneme.

4 body

3. FO57EF1–3: Překlápění tvárnice



(a) Počáteční poloha (b) Poloha s těžištěm nejvýše (c) Poloha po překlopení

Obr. 2: Základní polohy tvárnice při překlápění

a) V počáteční a konečné poloze spočívá tvárnice vždy na ploše, těžiště se proto nachází v polovině výšky tvárnice. V počáteční poloze je těžiště ve výšce $h_1 = 25\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}$ a v konečné poloze ve výšce $h_3 = 12{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}125\,\mathrm{m}$. Těžiště je v maximální výšce tehdy, nachází-li se nad hranou tvořící osu otáčení při překlápění (obr. 2b). Tuto maximální výšku určíme podle Pythagorovy věty

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{50\,\mathrm{cm}}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\,\mathrm{cm}}{2}\right)^2} = \sqrt{(25\,\mathrm{cm})^2 + (12{,}5\,\mathrm{cm})^2} \doteq 28\,\mathrm{cm} = 0{,}28\,\mathrm{m}.$$

4 body

b) Při překlápění konáme práci pouze do okamžiku, kdy je těžiště v maximální výšce, poté se tvárnice převrátí působením gravitační síly. Námi vykonaná práce je rovna změně polohové energie během první fáze překlápění, tj.

$$W = mg\,(h_2 - h_1) = 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot (0{,}28\,\mathrm{m} - 0{,}25\,\mathrm{m}) = 6\,\mathrm{J}.$$ **3 body**

c) Podobně jako v části b) vypočteme

$$W' = mg\,(h_2 - h_3) = 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot (0{,}28\,\mathrm{m} - 0{,}125\,\mathrm{m}) = 31\,\mathrm{J}.$$ **3 body**

4. FO57EF1–4: Úhlová rychlost otáčení

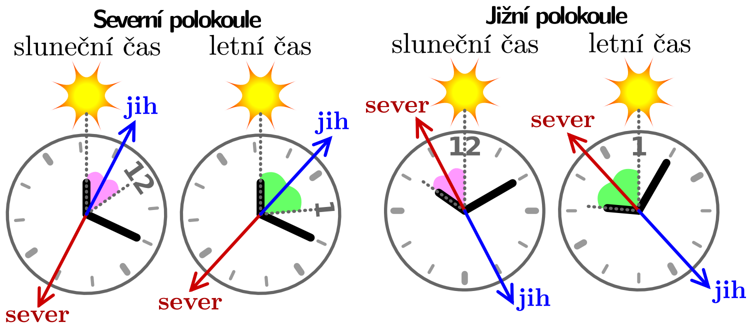
a) Pro úhlové rychlosti a poměry vycházejí následující hodnoty:

objekt	úhlová rychlost	poměr
sekundová ručička	$360°/\mathrm{min} = 6°/\mathrm{s}$	
minutová ručička	$360°/\mathrm{h} = 6°/\mathrm{min} = 0{,}1°/\mathrm{s}$	60:1
otáčení Země kolem osy	$360°/\mathrm{den} = 15°/\mathrm{h} = 0{,}25°/\mathrm{min}$	24:1
hodinová ručička	$720°/\mathrm{den} = 30°/\mathrm{h} = 0{,}5°/\mathrm{min}$	2:1
oběh Země kolem Slunce	$360°/\mathrm{rok} \doteq 0{,}986°/\mathrm{den} \doteq 0{,}041\,1°/\mathrm{h}$	730:1

5 bodů

Pozn.: Při výpočtech dosazujeme synodickou dobu rotace Země 24 h (podle zadání vzhledem ke Slunci) a běžně známou průměrnou délku roku 365,25 dne (případně stačí 365 dní).

b)



Obr. 3: Orientace pomocí Slunce a hodinek (upraveno podle Wikipedie)

Malou (hodinovou) ručičku hodinek namíříme směrem ke Slunci, osa úhlu mezi tímto směrem a spojnicí středu ciferníku s dvanáctkou ukazuje na jih. Ve 12 h místního času (slunečního, nikoli letního) je Slunce na jihu a podle popsané polohy hodinek na jih míří malá ručička i dvanáctka. Jelikož Slunce obíhá zdánlivě po obloze úhlovou rychlostí 15°/h a malá ručička se otáčí dvakrát rychleji, tj. rychlostí 30°/h, musíme otáčet ciferníkem rychlostí 15°/h v opačném směru, aby malá ručička směřovala stále ke Slunci. Tedy Slunce a dvanáctka s ciferníkem se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí v navzájem opačných směrech a osa příslušného úhlu směřující na jih zůstává na místě. Na jižní polokouli podobně namísto jihu určíme sever, v případě letního času půlíme úhel mezi malou ručičkou a jedničkou na ciferníku (obr. 3). **5 bodů**

5. FO57EF1–5: Cena za spotřebovanou elektrickou energii

Při ceně 4,18 Kč za 1 kWh máme za cenu 10 Kč k dispozici energii

$$E = \frac{10\,\mathrm{Kč}}{4{,}18\,\mathrm{Kč}} \cdot 1\,\mathrm{kWh} = 2{,}392\,3\,\mathrm{kWh} \doteq 2{,}39\,\mathrm{kWh} \doteq 8{,}6\,\mathrm{MJ}.$$

a) Z rovnice $E = mgh$ dostaneme

$$m = \frac{E}{gh} = \frac{8\,600\,000\,\mathrm{J}}{10\,\mathrm{N/kg} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 43\,000\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

b) Z rovnice $E = Q = mc\,(t_2 - t_1)$ vychází

$$m = \frac{E}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{8\,600\,000\,\mathrm{J}}{4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (65\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C})} \doteq 46\,\mathrm{kg}.$$

Při hustotě vody $1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ odpovídá tato hmotnost objemu $46\,\mathrm{l}$ vody.
3 body

c) Ze vztahu mezi energií a výkonem $E = P \cdot t$ dostaneme

$$t = \frac{E}{P} = \frac{8\,600\,000\,\mathrm{J}}{16\,\mathrm{W}} = 537\,500\,\mathrm{s} \doteq 149\,\mathrm{h} = 6\,\text{dní}\,5\,\mathrm{h}.$$ **2 body**

Výkon LED žárovky je $P = 16\,\mathrm{W} = 0{,}016\,\mathrm{kW}$, za dobu životnosti T spotřebuje energii

$$E_1 = PT = 0{,}016\,\mathrm{kW} \cdot 30\,000\,\mathrm{h} = 480\,\mathrm{kWh},$$

za niž bychom při stálé ceně elektřiny zaplatili částku $480 \cdot 4{,}18\,\text{Kč} \doteq 2\,000\,\text{Kč}$.
2 body

6. FO57EF1–6: Stavíme akvárium

a) Označme objem vody v akváriu $V = 60\,\mathrm{l} = 60\,\mathrm{dm^3} = 0{,}060\,\mathrm{m^3}$, šířku $b = 3{,}75\,\mathrm{dm} = 0{,}375\,\mathrm{m}$, výšku akvária $h = 4{,}0\,\mathrm{dm} = 0{,}40\,\mathrm{m}$, výšku vody v akváriu $h_1 = 0{,}8h = 3{,}2\,\mathrm{dm} = 0{,}32\,\mathrm{m}$. Délka akvária a pak vychází

$$a = \frac{V}{bh_1} = \frac{60\,\mathrm{dm^3}}{3{,}75\,\mathrm{dm} \cdot 3{,}2\,\mathrm{dm}} = 5{,}0\,\mathrm{dm} = 0{,}50\,\mathrm{m}.$$

Hledaný plošný obsah skla pak bude

$$S = ab + 2ah + 2bh = 5{,}0\,\mathrm{dm} \cdot 3{,}75\,\mathrm{dm} + 2 \cdot 5{,}0\,\mathrm{dm} \cdot 4{,}0\,\mathrm{dm} + 2 \cdot 3{,}75\,\mathrm{dm} \cdot 4{,}0\,\mathrm{dm} = 88{,}75\,\mathrm{dm^2} \doteq 0{,}89\,\mathrm{m^2}.$$

3 body

b) Tlaková síla je rovna tíze kapaliny

$$F = G = mg = V\varrho g = 0{,}060\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 600\,\mathrm{N}.$$

2 body

c) Pro hydrostatický tlak dostáváme

$$p = \frac{F}{ab} = \frac{600\,\mathrm{N}}{0{,}50\,\mathrm{m} \cdot 0{,}375\,\mathrm{m}} = 3\,200\,\mathrm{Pa}.$$

Jiný způsob:

$$p = \varrho g h_1 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}32\,\mathrm{m} = 3\,200\,\mathrm{Pa}.$$ **2 body**

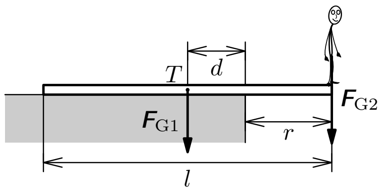
d) Tlak roste přímo úměrně s hloubkou vody, střední (průměrný) tlak je proto roven polovině tlaku u dna. Obsah části přední stěny, na niž působí tlaková síla vody, bude $S' = ah_1$. Platí

$$F' = \frac{p}{2}S' = \frac{1}{2}\varrho g h_1 \cdot a h_1 = \frac{1}{2}\varrho g a h_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}50\,\mathrm{m} \cdot (0{,}32\,\mathrm{m})^2 = 256\,\mathrm{N}.$$ **3 body**

7. FO57EF1–7: Člověk na trámu

Označme délku trámu $l = 6\,\mathrm{m}$, vzdálenost volného okraje trámu od hrany plošiny $r = 1{,}8\,\mathrm{m}$ a vzdálenost těžiště trámu od hrany plošiny $d = 3\,\mathrm{m} - 1{,}8\,\mathrm{m} = 1{,}2\,\mathrm{m}$ (obr. 4).

a) Tíhová síla F_{G1} působí na trám v jeho těžišti, které se nachází ve středu trámu, tj. ve vzdálenosti d od hrany, kolem níž se může trám převrátit. Tíhová síla působící na trám je $F_{G1} = 72\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 720\,\mathrm{N}$, tíhová síla působící na člověka je $F_{\mathrm{G2}} = 60\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 600\,\mathrm{N}$. O tom, zda se trám převrátí nebo ne, rozhodují momenty sil vzhledem k hraně plošiny, pro něž platí $M_1 = F_{\mathrm{G1}}d = 720\,\mathrm{N} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} = 864\,\mathrm{N \cdot m}$ a $M_2 = F_{\mathrm{G2}}r = 600\,\mathrm{N} \cdot 1{,}8\,\mathrm{m} = 1\,080\,\mathrm{N \cdot m}$. Jelikož $M_2 > M_1$, došlo by k převrácení. **3 body**



Obr. 4: Člověk na trámu

b) Označme m' hledanou hmotnost člověka. Rovnováha momentů sil nastane za podmínky

$$M_2' = m'gr = M_1 = 864\,\mathrm{N \cdot m},$$

z níž plyne

$$m' = \frac{M_1}{gr} = \frac{864\,\mathrm{N \cdot m}}{10\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}8\,\mathrm{m}} = 48\,\mathrm{kg}.$$

Při větší hmotnosti člověka dojde k převrácení. **2 body**

c) Označme x hledanou vzdálenost od konce trámu, $m_2 = 75\,\mathrm{kg}$ hmotnost člověka; člověk tak bude stát ve vzdálenosti $r - x$ od hrany plošiny. Rovnováha nastane za podmínky rovnosti momentů tíhových sil

$$m_2 g\,(r - x) = M_1 \qquad \Longrightarrow \qquad r - x = \frac{864\,\mathrm{N \cdot m}}{75\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}} = 1{,}152\,\mathrm{m},$$

z níž plyne $x = 1{,}8\,\mathrm{m} - 1{,}152\,\mathrm{m} = 0{,}65\,\mathrm{m}$ (v tomto případě je bezpečnější vždy zaokrouhlit vzdálenost od konce trámu nahoru). **2 body**

d) Označme d' hledanou délku přečnívající části trámu, $m_1 = 72\,\mathrm{kg}$ hmotnost trámu a $m_2 = 60\,\mathrm{kg}$ hmotnost člověka. Rovnováha momentů tíhových sil nastane za podmínky

$$m_1 g \left(\frac{l}{2} - d'\right) = m_2 g d' \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 \frac{l}{2} = (m_1 + m_2)\, d'.$$

Řešením získané rovnice dostáváme

$$d' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{l}{2} = \frac{72\,\mathrm{kg}}{72\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}} \cdot \frac{6\,\mathrm{m}}{2} \doteq 1{,}63\,\mathrm{m};$$

v tomto případě je namístě zaokrouhlit výsledek směrem dolů. **3 body**

8. FO57EF1–8: Atletická dráha

a) Rychlost běžce je

$$v = \frac{s}{t} = \frac{400\,\mathrm{m}}{43{,}18\,\mathrm{s}} \doteq 9{,}26\,\mathrm{m/s}.$$ **1 bod**

b) Délka kruhového oblouku polokružnice je $l = \pi r$. Z rovnice pro poloměr 1. dráhy plyne

$$r_1 = \frac{l}{\pi} = \frac{100\,\mathrm{m}}{\pi} \doteq 31{,}83\,\mathrm{m}.$$

Poloměr 8. dráhy pak bude $r_8 = r_1 + 7 \cdot 1{,}22\,\mathrm{m} = 31{,}83\,\mathrm{m} + 7 \cdot 1{,}22\,\mathrm{m} = 40{,}37\,\mathrm{m}$ **2 body**

Poznámka: Pokud řešitelé dosadí za π přibližnou hodnotu 3,14, vycházejí hodnoty 31,85 m, resp. 40,39 m; i takto zaokrouhlené výsledky by měly být uznány jako správné.

c) Celková délka 2. dráhy je

$$s_2 = 200\,\mathrm{m} + 2\pi r_2 = 200\,\mathrm{m} + 2\pi\,(31{,}83\,\mathrm{m} + 1{,}22\,\mathrm{m}) = 407{,}66\,\mathrm{m},$$

startovní čára 2. dráhy musí být posunuta o 7,66 m. Celková délka 8. dráhy je

$$s_8 = 200\,\mathrm{m} + 2\pi r_8 = 200\,\mathrm{m} + 2\pi\,(31{,}83\,\mathrm{m} + 7 \cdot 1{,}22\,\mathrm{m}) = 453{,}65\,\mathrm{m},$$

startovní čára 8. dráhy musí být posunuta o 53,65 m. **3 body**

Poznámka: Pokud řešitelé dosadí za π přibližnou hodnotu 3,14, vycházejí hodnoty 7,55 m, resp. 53,52 m; i takto zaokrouhlené výsledky by měly být uznány jako správné.

d) Běžec v každé dráze urazí vzdálenost 200 m na rovných úsecích a 200 m na kruhových obloucích. Běžec v 1. dráze startuje v místě cíle, opisuje proto na obloucích plný úhel 360° a trvá mu to polovinu výsledného času. Jeho úhlová rychlost pak vychází

$$u_1 = \frac{360°}{t/2} = \frac{360°}{21{,}59\,\mathrm{s}} = 16{,}7°/\mathrm{s}.$$

Běžec v 8. dráze urazí 200 m na rovných úsecích a 200 m na kruhových obloucích, ale vzhledem k posunutí startovní čáry opíše menší úhel. Z úlohy c) plyne, že celková délka obou oblouků, která by odpovídala úhlu 360°, je 253,65 m. Opsaný úhel určíme z poměru

$$\alpha = \frac{200\,\mathrm{m}}{253{,}65\,\mathrm{m}} \cdot 360° = 283{,}86°.$$

Hledaná úhlová rychlost tedy je

$$u_8 = \frac{\alpha}{t/2} = \frac{283{,}86°}{21{,}59\,\mathrm{s}} = 13{,}1°/\mathrm{s}. \qquad \textbf{4 body}$$

9. FO57EF1–9: Skládání beden

a) Z tabulky lze usoudit na platnost vzorců

$$F_1 = \frac{h}{l}\,F_\mathrm{G}, \qquad F_2 = \frac{d}{l}\,F_\mathrm{G},$$

z nichž první známe z hodin fyziky. **6 bodů**

b) V při pohybu bedny po nakloněné rovině působí rovnoběžně s nakloněnou rovinou dvě síly – síla F_1 ve směru nakloněné roviny šikmo dolů a třecí síla F_t působící proti pohybu, tedy v opačném směru. Pro velikost těchto sil platí

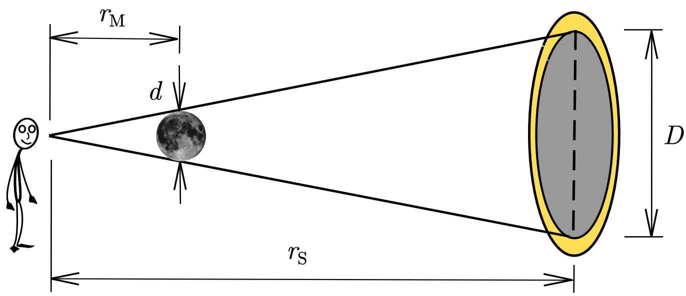
$$F_1 = \frac{h}{l}\,F_\mathrm{G} = \frac{h}{l}\,mg = \frac{1{,}6\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}} \cdot 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 80\,\mathrm{N},$$

$$F_\mathrm{t} = fF_2 = f\frac{d}{l}\,mg = f\,\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}\,mg =$$

$$= 0{,}35 \cdot \frac{\sqrt{(4\,\mathrm{m})^2 - (1{,}6\,\mathrm{m})^2}}{4\,\mathrm{m}} \cdot 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \doteq 64\,\mathrm{N}.$$

Jelikož síla F_1 je větší než třecí síla F_t, budou bedny sjíždět samy. Při jiné hmotnosti bedny se každá síla změní se stejným násobkem, nerovnost $F_1 > F_\mathrm{t}$ se zachová a bedny budou opět sjíždět samy. **4 body**

10. FO57EF1–10: Prstencové zatmění Slunce



Obr. 5: Schéma vzniku prstencového zatmění Slunce (poměry rozměrů a vzdálenosti neodpovídají skutečnosti)

a) Nejvýraznější prstencové zatmění nastane, jestliže zdánlivá velikost Slunce na obloze je největší a současně zdánlivá velikost Měsíce nejmenší. To nastane, jestliže Slunce je od Země v minimální vzdálenosti $r_\mathrm{S} = 147\,000\,000\,\mathrm{km}$ a Měsíc naopak v maximální vzdálenosti $r_\mathrm{M} = 407\,000\,\mathrm{km}$. **2 body**

b) Označme dále $d = 3\,480\,\mathrm{km}$ průměr Měsíce a D průměr průmětu Měsíce na slunečním disku. Z podobnosti trojúhelníků na obr. 5 plyne

$$\frac{d}{D} = \frac{r_\mathrm{M}}{r_\mathrm{S}} \qquad \Longrightarrow \qquad D = \frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{M}}\,d = \frac{147\,000\,000\,\mathrm{km}}{407\,000\,\mathrm{km}} \cdot 3\,480\,\mathrm{km} \doteq 1\,260\,000\,\mathrm{km};$$

průměr průmětu Měsíce na slunečním disku při maximální velikosti nezakryté části slunečního disku je tedy $1\,260\,000\,\mathrm{km}$. **4 body**

c) Označme ještě průměr Slunce $d_\mathrm{S} = 1\,390\,000\,\mathrm{km}$. Pro obsah kruhu o průměru D platí $S = \pi d^2/4$, poměr zakryté části slunečního disku k celému disku proto bude

$$\frac{\pi\frac{D^2}{4}}{\pi\frac{d_\mathrm{S}^2}{4}} = \left(\frac{D}{d_\mathrm{S}}\right)^2 = \left(\frac{1\,260\,000\,\mathrm{km}}{1\,390\,000\,\mathrm{km}}\right)^2 \doteq 0{,}82,$$

tj. 82 %. To znamená, že na svítící prstenec připadá 100 % − 82 % = 18 % obsahu plochy slunečního disku. **4 body**

11. FO57EF1–11: Ohřev pomocí slunečního záření

Označme hustotu oceli $\varrho = 7\,800\,\mathrm{kg/m^3}$, měrnou tepelnou kapacitu oceli $c = 452\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}$, tloušťku plechu $d = 1{,}5\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,5\,\mathrm{m}$, měrné skupenské teplo tání ledu (sněhu) $l_\mathrm{t} = 334\,000\,\mathrm{J/kg}$.

a) Objem plechu s plochou $S = 1\,\mathrm{m^2}$ je $V = Sd = 0{,}001\,5\,\mathrm{m^3}$, jeho hmotnost $m = \varrho V = 7\,800\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}001\,5\,\mathrm{m^3} = 11{,}7\,\mathrm{kg}$. Na zahřátí o $\Delta t = 10\,^\circ\mathrm{C}$ je nutné dodat $1\,\mathrm{m^2}$ plechu teplo $Q = mc\Delta t = 11{,}7\,\mathrm{kg} \cdot 452\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 10\,^\circ\mathrm{C} = 52{,}9\,\mathrm{kJ}$. Přijme-li $1\,\mathrm{m^2}$ plechu za každou sekundu energii $E = 900\,\mathrm{J}$, je jeho tepelný příkon $P = 900\,\mathrm{W}$ a doba ohřevu $\tau = Q/P = 52\,900\,\mathrm{J}/\,(900\,\mathrm{W}) \doteq 59\,\mathrm{s}$. **5 bodů**

b) Hmotnost vody v sudu i hmotnost původního sněhu je $m_\mathrm{s} = 600\,\mathrm{kg}$. Teplo nutné k roztání sněhu o této hmotnosti je $Q_\mathrm{t} = m_\mathrm{s} l_\mathrm{t} = 600\,\mathrm{kg} \cdot 334\,000\,\mathrm{J/kg} = 200{,}4\,\mathrm{MJ} \doteq 200\,\mathrm{MJ}$. Střecha má plošný obsah $S_\mathrm{s} = 8\,\mathrm{m} \cdot 18\,\mathrm{m} = 144\,\mathrm{m^2}$, za každou sekundu na ni dopadne energie $E' = 144 \cdot 900\,\mathrm{J} = 129\,600\,\mathrm{J}$. Tepelný příkon sněhu je tedy $P' = 129\,600\,\mathrm{W}$ a minimální doba tání sněhu $\tau_\mathrm{s} = Q_\mathrm{t}/P' = 200\,400\,000\,\mathrm{MJ}/\,(129\,600\,\mathrm{W}) = 1\,546\,\mathrm{s} \doteq 26\,\mathrm{min}$. **5 bodů**

Poznámka: Vypočtené časy se ve srovnání s praktickou zkušeností zdají krátké. Je však třeba uvážit, že při popsaném ději dochází k energetickým ztrátám. Část energie se od sněhu nebo plechu odráží a tudíž nepohlcuje, zahřátý plech odevzdává teplo okolnímu chladnějšímu vzduchu, část energie sám opět vyzáří apod.

12. FO57EF1–12: Hmotnost měděného drátu

a) Např. v tabulkách najdeme měrný elektrický odpor mědi $\varrho_\mathrm{e} = 0{,}018\,\Omega\cdot\mathrm{mm^2/m}$ a hustotu mědi $\varrho_\mathrm{m} = 8\,900\,\mathrm{kg/m^3}$. Ze vzorce pro odpor vodiče délky $l = 200\,\mathrm{m}$ a obsahu příčného řezu S

$$R = \varrho_\mathrm{e}\frac{l}{S}$$

vyjádříme obsah řezu

$$S = \frac{\varrho_e l}{R} = \frac{0{,}018\,\Omega\cdot\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}\cdot 200\,\mathrm{m}}{1{,}2\,\Omega} = 3{,}0\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}000\,003\,\mathrm{m}^2. \qquad \textbf{3 body}$$

Objem vodiče je $V = Sl = 0{,}000\,003\,\mathrm{m}^2 \cdot 200\,\mathrm{m} = 0{,}000\,6\,\mathrm{m}^3$. Hmotnost vodiče je $m = \varrho_m V = 8\,900\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 0{,}000\,6\,\mathrm{m}^3 \doteq 5{,}3\,\mathrm{kg}$, tedy drát lze unést. **3 body**

b) Při trojnásobné délce musí být při zachovaném odporu též trojnásobný průřez

$$R' = \varrho_e \frac{l'}{S'} = \varrho_e \frac{3l}{3S} = \varrho_e \frac{l}{S} = R. \qquad \textbf{2 body}$$

Pro objem potom vychází $V' = S'l' = 3S \cdot 3l = 9Sl = 9V$. Hmotnost, která je úměrná objemu, bude také 9× větší, tj. $m' = \varrho_m V' = 9\varrho_m V = 9m = 9 \cdot 5{,}3\,\mathrm{kg} \doteq 48\,\mathrm{kg}$. **2 body**

13. FO57EF1–13: Tři skřítkové

a) Označme $R_Š = 30\,\Omega$, $R_B = 40\,\Omega$, $R_N = 50\,\Omega$, $U = 21\,\mathrm{V}$. Proud v horní větvi bude

$$I_{ŠB} = \frac{U}{R_Š + R_B} = \frac{21\,\mathrm{V}}{30\,\Omega + 40\,\Omega} = 0{,}30\,\mathrm{A},$$

v dolní větvi $I_N = U/R_N = 21\,\mathrm{V}/50\,\Omega = 0{,}42\,\mathrm{A}$. Příkony v příbytcích pak vycházejí

$$P_Š = R_Š I_{ŠB}^2 = 30\,\Omega \cdot (0{,}30\,\mathrm{A})^2 = 2{,}70\,\mathrm{W},$$
$$P_B = R_B I_{ŠB}^2 = 40\,\Omega \cdot (0{,}30\,\mathrm{A})^2 = 3{,}60\,\mathrm{W},$$
$$P_N = R_N I_N^2 = 50\,\Omega \cdot (0{,}42\,\mathrm{A})^2 = 8{,}82\,\mathrm{W}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) Pro celkový odpor R vedení platí rovnice

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_Š + R_B} + \frac{1}{R_N} = \frac{1}{30\,\Omega + 40\,\Omega} + \frac{1}{50\,\Omega} = \frac{120}{3\,500\,\Omega},$$

z níž dostaneme $R = (3500/120)\ \Omega \doteq 9{,}2\,\Omega$. Hledaný proud vychází $I = U/R = 21\,\mathrm{V}/\,(29{,}2\,\Omega) \doteq 0{,}72\,\mathrm{A}$.
Jiný způsob: Celkový proud lze získat i jako součet proudů v jednotlivých větvích $I = I_{ŠB} + I_N = 0{,}30\,\mathrm{A} + 0{,}42\,\mathrm{A} = 0{,}72\,\mathrm{A}$. **2 body**

c) U Šmudly je příkon nulový, neboť jeho větev je přerušená. U Nudly je původní příkon nezměněn, tj. 8,82 W, protože v jeho větvi k žádné změně nedošlo. **1 bod**

d) Pro požadovaný příkon $P_Š = 2{,}7\,\mathrm{W}$ potřebuje Šmudla odpor svého topení splňující rovnici

$$P_Š = \frac{U^2}{R'_Š},$$

z níž plyne $R'_\text{Š} = U^2/P_\text{Š} = (21\,\text{V})^2 / (2{,}7\,\text{W}) \doteq 163\,\Omega$. K dosažení této hodnoty musí ke své původní spirále připojit sériově spirálu o odporu $163\,\Omega - 30\,\Omega = 133\,\Omega$.

2 body

e) Nudla je zapojen v samostatné větvi, proto se přiváděné napětí nemění. Např. podle vztahu $P'_\text{N} = U^2/R'$ musí odpor svých spirál zmenšit, tedy zapojí je paralelně. Označme $R_1 = 30\,\Omega$ odpor zakoupené spirály. Při paralelním zapojení bude výsledný odpor R' splňovat

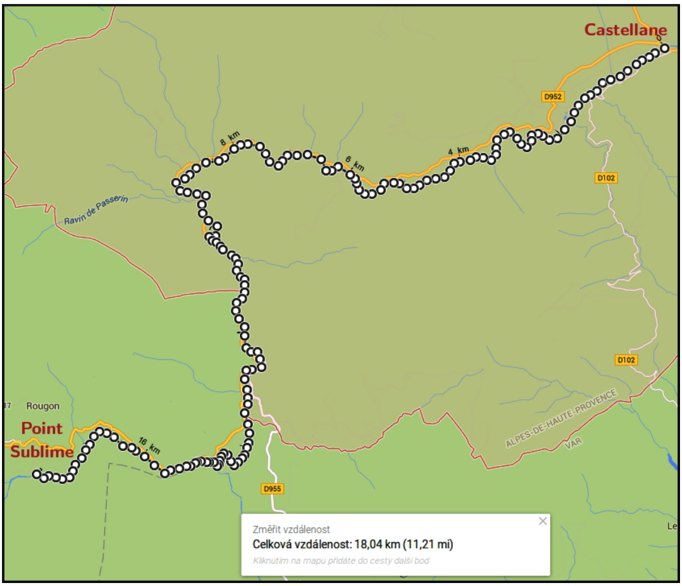
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_\text{N}} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{50\,\Omega} + \frac{1}{30\,\Omega} = \frac{80}{1\,500\,\Omega},$$

odkud $R' = 18{,}75\,\Omega$. Příkon po zapojení přídavné spirály pak vychází $P'_\text{N} = U^2/R' = (21\,\text{V})^2 / (18{,}75\,\Omega) \doteq 23{,}5\,\text{W}$. **2 body**

14. FO57EF1–14: Kaňon Gorges du Verdon

a) Souřadnice městečka Castellane jsou 43,846° (přibližně 43°51′) severní šířky, 6,513° (přibližně 6°30′) východní délky, místa Point Sublime pak 43,792° (přibližně 43°48′) severní šířky, 6,399° (přibližně 6°24′) východní délky (např. v aplikaci Mapy Google zjistíme souřadnice po kliknutí pravým tlačítkem myši na mapu v položce nabídky „Co je tady?“). **3 body**

Poznámka: Při určování souřadnic pomocí aplikace doporučujeme tolerovat nepřesnosti v řádu setin stupně nebo jednotek úhlových minut.



Obr. 6: Měření vzdálenosti mezi Castellane a Point Sublime v aplikaci Mapy Google

b) Pomocí aplikace (např. v aplikaci Mapy Google začneme měření po kliknutí pravým tlačítkem myši na mapu v položce nabídky „Změřit vzdálenost“, postupně přidáváme body podél řeky) odhadneme délku na 18 km (viz obr. 6).

2 body

Poznámka: Určování vzdáleností závisí na přesné volbě počátečního a koncového bodu i na hustotě bodů podél řeky, mezi body aplikace prokládá úsečky. Údaj v rozmezí 16 km – 18 km lze považovat za vyhovující.

c) Délka řeky z Castellane k Point Sublime je podle části b) přibližně 18 km. Pojedeme-li rychlostí 1 m/s po proudu z Catellane k Point Sublime, tak vezmeme-li v úvahu rychlost proudu, bude rychlost raftu vzhledem k břehu 1,5 m/s neboli 5,4 km/h. Celou vzdálenost ujedeme za čas $t_1 = 18\,\mathrm{km}/\,(5{,}4\,\mathrm{km/h}) = 3\,\mathrm{h}\,20\,\mathrm{min}$. Pokud pojedeme nazpátek, musíme rychlost proudu odečíst, naše rychlost proto bude 0,5 m/s neboli 1,8 km/h. Cesta zpět by zabrala $t_2 = 18\,\mathrm{km}/\,(1{,}8\,\mathrm{km/h}) = 10\,\mathrm{h}$ a byla by zřejmě jen pro velmi zdatné vodáky.

3 body

d) Podobně jako v části b) pomocí aplikace odhadneme délku rovné části mostu na 150 m (viz obr. 7). Automobil musí celkem ujet vzdálenost $s = 150\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{m} = 162\,\mathrm{m}$. Při rychlosti $v = 50\,\mathrm{km/h} \doteq 13{,}9\,\mathrm{m/s}$ k tomu potřebuje čas $t = s/v = 162\,\mathrm{m}/\,(13{,}9\,\mathrm{m/s}) \doteq 12\,\mathrm{s}$. **2 body**

Obr. 7: Odhad délky mostu Pont de l'Artuby

Poznámka: Odhad vzdáleností závisí na přesné volbě počátečního a koncového bodu, na internetu lze nalézt údaj 142 m (viz `https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_Chauli%C3%A8re`). Hodnoty v rozmezí 110 m – 170 m lze považovat za vyhovující. Pak je ale nutné přepočítat odvozené výsledky.

15. FO57EF1–15: Experimentální úloha: nakloněná rovina

Z pozorování plyne, že pohyb je zrychlený. Doba pohybu s rostoucí dráhou roste, ne však přímo úměrně jako při rovnoměrném pohybu, nýbrž podle křivky, která se ohýbá doprava. Je to způsobeno tím, že každý přidaný dráhový úsek kulička proběhne větší rychlostí – tedy celková doba pohybu se zvětšuje stále o menší a menší hodnotu.

Za úlohu včetně měření celkem **10 bodů**

16. FO57EF1–16: Experimentální úloha: hustota skla

Řešení teoretické části úlohy lze provést následující úvahou. Láhev s vodou plovoucí s určitým množstvím vody podle zadání z vody vyjmeme a zvážíme. Tím určíme hmotnost láhve s vodou a z ní tíhu. Podle Archimédova zákona má stejnou tíhu, a tedy stejnou hmotnost, voda vytlačená lahví. Z hmotnosti vytlačené vody a známé hustoty vody vypočteme objem vytlačené vody. Dále láhev zcela vodou naplníme a přelitím vody do odměrného válce zjistíme vnitřní objem láhve. Odečtením tohoto objemu od objemu vytlačené vody získáme objem skla. Vážením určíme hmotnost prázdné láhve. Z objemu skla a z hmotnosti prázdné láhve vypočteme hledanou hustotu skla; tabulková hodnota se pohybuje v rozmezí přibližně $2\,400\,\mathrm{kg/m^3}$–$2\,800\,\mathrm{kg/m^3}$.

Jiný postup: K výsledným hodnotám lze dospět i odvozením potřebných vztahů. Označme m hmotnost láhve s určitým množstvím vody podle zadání, m_s hmotnost prázdné láhve, V_v objem vytlačené vody, V_i vnitřní objem láhve, ϱ_v hustotu vody a ϱ_s hledanou hustotu skla. Podle Archimédova zákona platí

$$mg = \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} g.$$

Z rovnice dostaneme

$$V_\mathrm{v} = \frac{m}{\varrho_\mathrm{v}}.$$

Hustota skla pak je

$$\varrho_\mathrm{s} = \frac{m_\mathrm{s}}{V_\mathrm{v} - V_\mathrm{i}} = \frac{m_\mathrm{s}}{\dfrac{m}{\varrho_\mathrm{v}} - V_\mathrm{i}}.$$

Stačí zvážit prázdnou láhev (hmotnost m_s) a láhev s daným množstvím vody (hmotnost m) a odměrným válcem změřit vnitřní objem láhve V_i.

Za úlohu včetně měření celkem **10 bodů**