

Řešení úloh okresního kola 57. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autor úloh: J. Jírů

FO57E2–1: Dřevěná houpačka

Označme délku fošny $l = 4,2$ m, hmotnost fošny $m = 18$ kg, hmotnost Michala $m_1 = 40$ kg, hmotnost Petrušky $m_2 = 25$ kg.

- a) Označme dále x vzdálenost Michala od konce fošny. Těžiště fošny je v ose (přesněji nad osou) otáčení, moment tíhové síly fošny je proto nulový. V rovnováze se musí rovnat momenty tíhových sil obou dětí

$$m_1 g \left(\frac{l}{2} - x \right) = m_2 g \frac{l}{2}.$$

Z rovnice plyne

$$x = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} l = \frac{40 \text{ kg} - 25 \text{ kg}}{2 \cdot 40 \text{ kg}} \cdot 4,2 \text{ m} \doteq 0,79 \text{ m}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Označme m'_2 hledanou hmotnost. Těžiště fošny a tedy střed fošny nyní leží ve vzdálenosti $l/6$ délky fošny od osy otáčení, moment tíhové síly fošny je $mg l/6$. V rovnováze platí

$$m_1 g \frac{l}{3} = mg \frac{l}{6} + m'_2 g \frac{2l}{3}.$$

Z rovnice získáváme

$$m'_2 = \frac{m_1}{2} - \frac{m}{4} = \frac{40 \text{ kg}}{2} - \frac{18 \text{ kg}}{4} = 15,5 \text{ kg}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Označme x' hledanou vzdálenost. Nyní je moment tíhové síly fošny $mg(l/2 - x')$. V rovnováze je splněna rovnice

$$m_1 g x' = m_2 g (l - x') + mg \left(\frac{l}{2} - x' \right),$$

z níž plyne

$$x' = \frac{m_2 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + m} l = \frac{25 \text{ kg} + \frac{18 \text{ kg}}{2}}{40 \text{ kg} + 25 \text{ kg} + 18 \text{ kg}} \cdot 4,2 \text{ m} \doteq 1,72 \text{ m}.$$

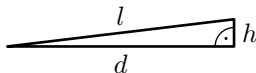
4 body

FO57E2–2: Automobil jede do kopce

Označme $m = 1300$ kg hmotnost automobilu, $t_1 = 8$ min = 480 s čas pohybu po vodorovné rovině, $t_2 = 4$ min = 240 s čas pohybu do kopce a $P_0 = 11$ kW = 11 000 W výkon automobilu.

- a) Z grafu určíme rychlost – např. za 10 min urazí vzdálenost 12 km, za hodinu tedy 72 km, tj. pohybuje se rychlostí $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$. Automobil jedoucí rovnoměrným pohybem po vodorovné silnici spotřebuje svůj výkon na překonávání odporu vzduchu. Při rovnoměrném pohybu je odporová síla stejná jako tahová síla motoru a platí pro ni

$$F_0 = \frac{P_0}{v} = \frac{11\,000 \text{ W}}{20 \text{ m/s}} = 550 \text{ N.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$



Obr. 1: Výška a délka trasy při stoupání

- b) Podle obr. 1 najdeme vztah mezi vzdáleností ujetou při stoupání l a výškou h . Ve fyzikálních úlohách s nakloněnou rovinou chápeme stoupání jako podíl $h/l = 12\% = 0,12$ a pro výšku tak dostáváme $h = 0,12l$. Při jízdě do kopce se výkon navíc využívá na zvětšování polohové energie automobilu. Kromě odporové síly působí proti pohybu i síla rovnoběžná s nakloněnou rovinou (složka tíhové síly působící na automobil)

$$F = mg \frac{h}{l} = 1\,300 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 0,12 = 1\,560 \text{ N.}$$

Celkový výkon pak je

$$P = P_0 + Fv = 11\,000 \text{ W} + 1\,560 \text{ N} \cdot 20 \text{ m/s} = 42,2 \text{ kW.} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Poznámka: V matematice a zeměpise je stoupání definováno nikoliv přes vzdálenost l měřenou podél silnice, ale pomocí vzdálenosti d měřené kolmo na vrstevnice. Podle této definice stoupání pak platí

$$\frac{h}{d} = 0,12, \quad \frac{h}{0,12} = d.$$

Podle Pythagorovy věty dále získáváme

$$l^2 = d^2 + h^2 = \frac{h^2}{0,12^2} + h^2 = \frac{1,0144}{0,0144} h^2, \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{0,0144}{1,0144}} l \doteq 0,12l.$$

Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi hodnotami $\sin \alpha$ a $\text{tg} \alpha$ je pro malé úhly velmi malý a v číselném výsledku se po zaokrouhlení neprojevívá, doporučujeme uznat i tento postup.

- c) Automobil urazil do kopce dráhu

$$l = vt_2 = 20 \text{ m/s} \cdot 240 \text{ s} = 4\,800 \text{ m.}$$

Při daném stoupání 12 % je dosažená výška $h = 0,12l = 0,12 \cdot 4800 \text{ m} = 576 \text{ m}$.
Nadmořská výška automobilu v cíli je

$$h' = 310 \text{ m} + 576 \text{ m} = 886 \text{ m}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- d) Celková práce je určena součtem práce nutné k překonávání odporové síly po celou dobu jízdy a získané polohové energie automobilu

$$W = P_0(t_1 + t_2) + mgh = 11\,000 \text{ W} \cdot (480 \text{ s} + 240 \text{ s}) + 1\,300 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 576 \text{ m} \doteq 15,4 \text{ MJ}.$$

Jiné řešení: Celkovou práci lze určit i podle výkonů motoru na jednotlivých úsecích; potom

$$W = P_0t_1 + Pt_2 = 11\,000 \text{ W} \cdot 480 \text{ s} + 42\,200 \text{ W} \cdot 240 \text{ s} \doteq 15,4 \text{ MJ}.$$

2 body

FO57E2-3: Čištění mrazicího boxu

- a) K roztání ledu o hmotnosti $m = 2,3 \text{ kg}$ je nutno dodat teplo $Q = ml_t = 2,3 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ} \doteq 768 \text{ kJ}$. Voda o objemu 6,5 l, tedy o hmotnosti $m_1 = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,0065 \text{ m}^3 = 6,5 \text{ kg}$, při ochlazení z teploty $t_1 = 20^\circ\text{C}$ na teplotu $t = 0^\circ\text{C}$ může poskytnout teplo $Q_1 = m_1c(t_1 - t) = 6,5 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)} \cdot 20^\circ\text{C} \doteq 543 \text{ kJ} < Q$, to znamená, že voda k roztání veškerého ledu nestačí. Teplo stačí k roztání ledu o hmotnosti

$$m_2 = \frac{Q_1}{l_t} = \frac{543 \text{ kJ}}{334 \text{ kJ}} \doteq 1,63 \text{ kg}.$$

Neroztátý led má hmotnost $2,3 \text{ kg} - 1,63 \text{ kg} = 0,67 \text{ kg}$. **4 body**

- b) Hledaná hmotnost m_3 vody o teplotě $t_3 = 100^\circ\text{C}$ musí splňovat podmínku $m_3c(t_3 - t) = Q$; z rovnice plyne

$$m_3 = \frac{Q}{c(t_3 - t)} = \frac{768\,000 \text{ J}}{4180 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)} (100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})} \doteq 1,8 \text{ kg},$$

tedy do nádoby musíme přilít přibližně 1,8 l vroucí vody. **3 body**

- c) Hledaná teplota t_4 vody o objemu 4,7 l, a tedy o hmotnosti $m_4 = 4,7 \text{ kg}$, musí splňovat podmínku $m_4c(t_4 - t) = Q$. Z této rovnice podobně jako v předchozím bodě plyne

$$t_4 = t + \frac{Q}{m_4c} = 0^\circ\text{C} + \frac{768\,000 \text{ J}}{4,7 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C})} \doteq 39^\circ\text{C}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

FO57E2-4: Žárovka ze staré svítilny

- a) Napětí na připojeném rezistoru musí být $U_1 = 8,4 \text{ V} - 6 \text{ V} = 2,4 \text{ V}$. Hledaný odpor rezistoru je

$$R = \frac{2,4 \text{ V}}{0,15 \text{ A}} = 16 \Omega.$$

2 body

- b) Příkon dodávaný zdrojem do obvodu $P_0 = 8,4 \text{ V} \cdot 0,15 \text{ A} = 1,26 \text{ W}$, příkon přijímaný rezistorem $P_R = 2,4 \text{ V} \cdot 0,15 \text{ A} = 0,36 \text{ W}$. Rezistor spotřebovává část

$$k_R = \frac{P_R}{P_0} = \frac{0,36 \text{ W}}{1,26 \text{ W}} \doteq 0,29 = 29 \%$$

energie dodávané zdrojem.

2 body

- c) Žárovka má příkon $P_z = 6 \text{ V} \cdot 0,15 \text{ A} = 0,9 \text{ W}$. Energii $1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ J}$ spotřebuje za dobu

$$t = \frac{3\,600\,000 \text{ J}}{0,9 \text{ W}} = 4\,000\,000 \text{ s} \doteq 1\,100 \text{ h}.$$

2 body

- d) i) Zvětší se odpor obvodu, na žárovku případně menší napětí, bude svítit méně.
ii) Zmenší se odpor obvodu, na žárovku případně větší napětí, bude svítit více (podle skutečného napětí na žárovce a doby zapojení může dojít k přepálení vlákna).
iii) Zmenší se odpor mezi uzly žárovky, zmenší se napětí mezi nimi, bude svítit méně.
iv) Na původní větvi se napětí nezmění, žárovka bude svítit stejně.

4 body