Řešení úloh krajského kola 57. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 4), R. Baník (3)

1. Pro některé výpočty je nutné převést hodnoty rychlosti do soustavy SI: $v_1 = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 19,\bar{4}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

a) Výkon motoru při jízdě po rovině je

$$P_1 = \left(F_\mathrm{v} + kv_1^2\right) v_1 = \ 22\ \mathrm{kW}.$$

Výkon motoru při jízdě do kopce je

$$P_2 = \left(F_\mathrm{v} + pmg + kv_2^2\right) v_2 = \ 33\ \mathrm{kW}.$$

4 body

b) Průměrná rychlost je

$$v = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s_1+s_2}{\dfrac{s_1}{v_1}+\dfrac{s_2}{v_2}} = \frac{(s_1+s_2)\,v_1v_2}{s_1v_2+s_2v_1} = \ 84\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

(Rychlost a dráhu je vhodné dosazovat v původních jednotkách.)

2 body

c) Z rovnosti velikostí urychlující síly a brzdících sil

$$pmg = F_\mathrm{v} + kv_\mathrm{max}^2$$

dostaneme

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{pmg - F_v}{k}} = \ 29{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 105\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

2 body

d) Brzdící výkon automobilu je

$$P = \left(pmg - F_\mathrm{v} - kv_2^2\right) v_2 = \ 8{,}7\ \mathrm{kW}.$$

2 body

2. a) Ze vztahu $a_d = r\omega^2$ plyne $\omega = \sqrt{\dfrac{a_d}{r}}$. Při konstantním dostředivém zrychlení s rostoucím poloměrem úhlová rychlost klesá, proto má větší úhlovou rychlost Matěj. Ke stejnému závěru dojdeme přímými výpočty a porovnáním výsledků.

1 bod

b) Ze vztahu $a_d = \dfrac{v^2}{r}$ plyne $v = \sqrt{a_d r}$. Při konstantním dostředivém zrychlení s rostoucím poloměrem obvodová rychlost roste, proto má větší obvodovou rychlost Vendulka. Ke stejnému závěru dojdeme přímými výpočty a porovnáním výsledků.

1 bod

c) Počet otáček každého kolotoče vypočteme ze vztahu

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\omega \Delta t}{2\pi} = \frac{\Delta t}{2\pi}\sqrt{\frac{a_d}{r}}.$$

Po dosazení dostaneme pro Matěje $N_1 = 51$, pro Vendulku $N_2 = 44$.

2 body

Uraženou dráhu každého kolotoče vypočteme ze vztahu

$$s = v\Delta t = \sqrt{a_d r}\Delta t.$$

Po dosazení dostaneme pro Matěje $s_1 = 1\ 130$ m, pro Vendulku $s_2 = 1\ 320$ m.

2 body

d) Během zastavování urazí každý pasažér dráhu

$$3 \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} a t^2,$$

kde

$$a = \frac{v}{t}, \quad v = \sqrt{a_d r}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$t = 12\pi\sqrt{\frac{r}{a_d}}.$$

Matěj se zastaví za čas $t_1 = 12\pi\sqrt{\frac{r_1}{a_d}} = 32$ s, Vendulka za čas $t_2 = 12\pi\sqrt{\frac{r_2}{a_d}} =$ $= 37$ s.

4 body

3.a) Z rovnice $h_0 = \frac{1}{2} g t_1^2$ plyne

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 0{,}32 \text{ s}.$$

Dále platí

$$v_1 = g t_1 = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{2 g h_0} = 3{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

b) Celková doba t_2 pádu kuličky se skládá z doby t'_2 volného pádu po dráze $h_0 - h$ a doby t''_2 vodorovného vrhu, která je totožná s dobou volného pádu z výšky h:

$$t_2 = t'_2 + t''_2 = \sqrt{\frac{2(h_0 - h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}45 \text{ s}.$$

3 body

Velikost rychlosti dopadu kuličky na podlahu určíme ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Z rovnice plyne

$$v_2 = \sqrt{2gh_0} = v_1 = 3{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2 body

Velikost rychlosti dopadu lze též určit ze složek rychlosti ve vodorovném a ve svislém směru

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2},$$

kde dosadíme $v_{2x} = \sqrt{2g\,(h_0 - h)}$, $v_{2y} = \sqrt{2gh}$.

c) Opět ze zákona zachování mechanické energie dostaneme

$$v_0 = \sqrt{2g\,(h_0 - h)}.$$

Rychlostí této velikosti se kulička pohybuje rovnoměrně vodorovným směrem po dobu vodorovného vrhu, čímž se vodorovně posune o délku

$$d = v_0 t_2'' = \sqrt{2g\,(h_0 - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(h_0 - h)\,h} = 49\ \mathrm{cm}.$$

3 body

4.a) Vozík působí na vlákno větší silou, visí-li vedle nakloněné roviny, proto se pohybuje dolů. Z pohybové rovnice

$$Mg - mg = (M + m)\,a$$

plyne

$$a = \frac{M - m}{M + m}g = \frac{1}{12}g = 0{,}82\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

Na nakloněné rovině je vozík naopak tažen nahoru. Z pohybové rovnice

$$mg - Mg\sin\alpha = (M + m)\,a$$

po dosazení za velikost zrychlení plyne

$$\sin\alpha = \frac{2m - M}{M} = \frac{9}{13} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 44^\circ.$$

3 body

b) Při pohybu vozíku svisle dolů lze velikost síly napínající vlákno vyjádřit jedním ze dvou způsobů

$$F_1 = mg + ma = mg + m\frac{M - m}{M + m}g$$

nebo

$$F_1 = Mg - Ma = Mg - M\frac{M - m}{M + m}g.$$

V obou případech dostaneme

$$F_1 = \frac{2Mm}{M+m} g = 0{,}24g = 2{,}3\ \mathrm{N}.$$

2,5 bodu

Při pohybu vozíku po nakloněné rovině nahoru lze velikost síly napínající vlákno vyjádřit jedním ze dvou způsobů

$$F_2 = mg - ma = mg - m\frac{M-m}{M+m} g$$

nebo

$$F_2 = Mg \sin\alpha + Ma = Mg\frac{2m-M}{M} + M\frac{M-m}{M+m} g.$$

V obou případech dostaneme

$$F_2 = \frac{2m^2}{M+m} g = 0{,}20g = 2{,}0\ \mathrm{N}.$$

2,5 bodu