Řešení úloh 1. kola 57. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Markův čas na celé trase tří okruhů je

$$t = \frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_2} = \frac{(v_2 + 2v_1)s}{v_1 v_2}.$$

Obdobně Vaškův čas na celé trase tří okruhů je

$$t' = \frac{2s}{v_1} + \frac{s}{v_3} = \frac{(2v_3 + v_1)s}{v_1 v_3}.$$

Pro časový rozdíl pak platí

$$\Delta t = t' - t = \frac{(v_1 v_2 + v_2 v_3 - 2v_1 v_3)s}{v_1 v_2 v_3} = 0{,}001\,98\ \mathrm{h} = 7\ \mathrm{s}.$$

Jelikož $t' - t > 0$, v cíli byl první Marek.

6 bodů

b) Z rovnosti časů

$$\frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_2} = \frac{2s}{v_1} + \frac{s}{v_3'}$$

plyne

$$v_3' = \frac{v_1 v_2}{2v_1 - v_2} = 32{,}31\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

4 body

2.a) Z rovnice

$$h = \frac{1}{2}at_1^2 + v_1(T - 2t_1) + \frac{1}{2}at_1^2,$$

kde

$$a = \frac{v_1}{t_1}, \tag{1}$$

dostaneme

$$h = v_1(T - t_1).$$

Z rovnice plyne

$$t_1 = T - \frac{h}{v_1} = 2{,}4\ \mathrm{s}. \tag{2}$$

Dosazením rovnice (2) do rovnice (1) dostaneme

$$a = \frac{v_1^2}{v_1 T - h} = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

4 body

b) Ze známých hodnot T, v_1 sestrojíme graf jízdy z přízemí do 6. patra. Na základě doby jízdy rovnoměrným pohybem mezi dvěma sousedními patry

$$\Delta t = \frac{h}{6} \cdot \frac{1}{v_1} = 1{,}35\ \text{s}$$

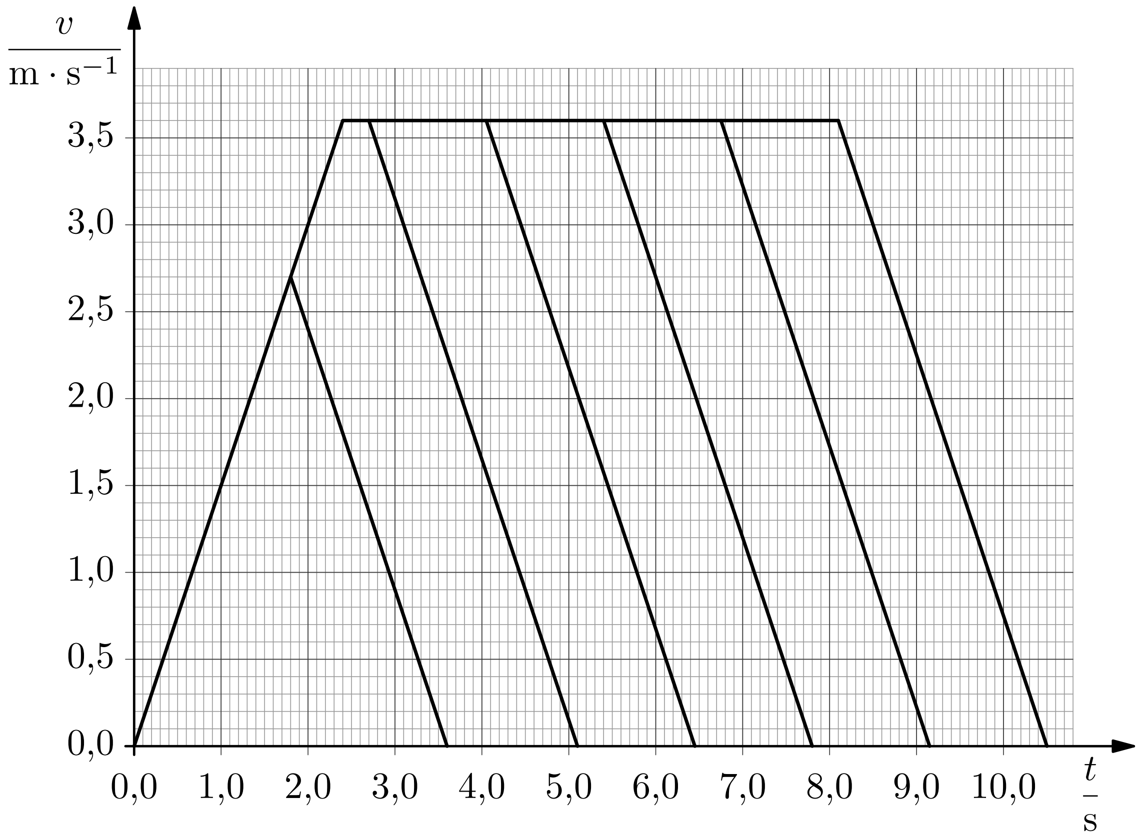
dokreslíme rovnoběžně grafy zpomalených úseků do 5., 4., 3. a 2. patra. Doba jízdy Δt_1 do prvního patra splňuje rovnici

$$\frac{h}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} a \left(\frac{\Delta t_1}{2} \right)^2 ,$$

z níž plyne

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2h}{3a}} = 3{,}6\ \text{s}.$$

Obdobně tak doplníme rovnoběžný graf zpomaleného úseku do prvního patra.



6 bodů

3.a) Podle zákona zachování mechanické energie je v každém okamžiku součet potenciální energie střely vzhledem k ústí hlavně a její kinetické energie roven počáteční kinetické energii střely, proto platí:

$$E_0 = m_1 g h_1 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Z rovnice plyne:

$$h_1 = \frac{E_0 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{m_1 g}, \tag{1}$$

kde

$$E_0 \geq \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Z rovnice

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$$

dostaneme počáteční rychlost střely

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m_1}} = 270\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \tag{2}$$

Pro rychlost v_1, kde $v_1 < v_0$, dostaneme $h_1 \doteq 2\ 500$ m, pro rychlost v_1', kde $v_1' > v_0$, úloha nemá řešení, neboť požadovaná rychlost je větší než počáteční rychlost výstřelu. (Dosadíme-li přesto do (1), dostaneme $h_1' \doteq -900$ m, což odpovídá hloubce pod ústím hlavně, v níž by střela následným volným pádem požadované rychlosti dosáhla.)

5 bodů

b) V největší výšce je kinetická energie střely nulová, platí proto

$$E_0 = m_1 g h_{\max}.$$

Z rovnice plyne

$$h_{\max} = \frac{E_0}{m_1 g} = 3\ 700\ \mathrm{m}.$$

2 body

c) Ze zákona zachování hybnosti pro soustavu puška a náboj plyne

$$m_2 v_2 = m_1 v_0,$$

kde po dosazení vztahu (2) a po úpravě dostaneme

$$v_2 = \frac{\sqrt{2 m_1 E_0}}{m_2} = 1{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

4.a) V neinerciální soustavě spojené s kabinou působí v nejvyšší poloze na pasažéra ve směru svisle dolů tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a v opačném směru setrvačná odstředivá síla o velikosti

$$F_\mathrm{s} = mr\frac{4\pi^2}{T^2}. \tag{1}$$

Jejich výslednice směřující svisle dolů má velikost $F = mg - F_\mathrm{s}$, přičemž současně podle zadání platí $F = \frac{1}{3} mg$, proto

$$F_\mathrm{s} = \frac{2}{3} mg. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}} = 5{,}2\ \mathrm{s}.$$

3 body

V nejnižší poloze mají tíhová síla a setrvačná odstředivá síla stejný směr svisle dolů, proto

$$F_1 = mg + F_\mathrm{s} = \frac{5}{3}mg.$$

1 bod

Ve vodorovné poloze ramene jsou uvedené síly navzájem kolmé, proto

$$F_2 = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{2}{3}mg\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}mg = 1{,}20mg.$$

2 body

b) Ve stavu beztíže v nejvyšší poloze je velikost setrvačné odstředivé síly $F_\mathrm{s} = mg$. Užitím vztahu (1) dostaneme

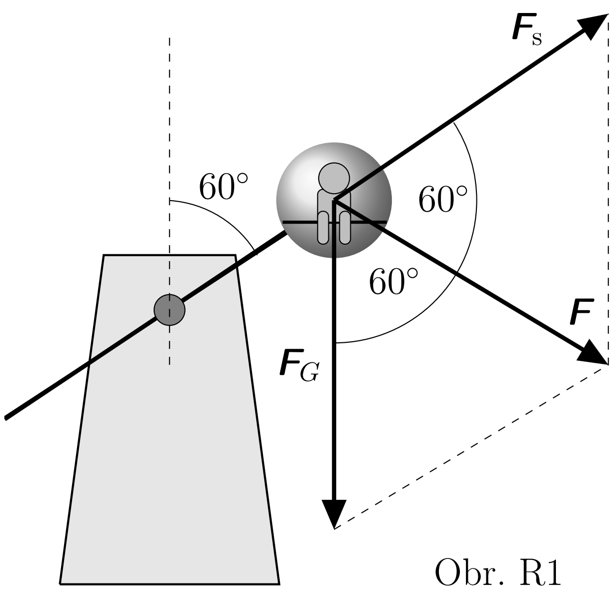
$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 4{,}3\ \mathrm{s}.$$

2 body

Výslednice dvou sil stejné velikosti má stejnou velikost, svírají-li síly úhel 120° (obr. R1). Tato situace nastane při odklonění ramene kabiny od svislého směru o úhel ±60°, tedy úhel mezi uvedenými polohami ramene je 120°. Přetížení však nastane v doplňkovém úhlu 240°, který obsahuje spodní polohu, v níž je přetížení největší. Pasažér je tak ve stavu přetížení po dobu

$$\Delta t = \frac{240}{360}T' = \frac{2}{3}T' = 2{,}8\ \mathrm{s}.$$

2 body



Obr. R1

5.a) Při jízdě do kopce platí

$$F_1 = m_1 g \frac{h}{s} + F_{\mathrm{v}1} + kv_1^2 = 2\,600\ \mathrm{N},$$

$$P_1 = F_1 v_1 = \left(m_1 g \frac{h}{s} + F_{\mathrm{v}1} + kv_1^2 \right) v_1 = 64\ \mathrm{kW},$$

$$W_1 = F_1 s = m_1 g h + \left(F_{\mathrm{v}1} + kv_1^2 \right) s = 12\ \mathrm{MJ}.$$

3 body

b) Obdobně platí:

$$F_2 = (m_1 + m_2) g \frac{h}{s} + (F_{\mathrm{v}1} + F_{\mathrm{v}2}) + kv_2^2 = 3\,000\ \mathrm{N},$$

$$P_2 = F_2 v_2 = \left[(m_1 + m_2) g \frac{h}{s} + (F_{\mathrm{v}1} + F_{\mathrm{v}2}) + kv_2^2 \right] v_2 = 50\ \mathrm{kW},$$

$$W_2 = F_2 s = (m_1 + m_2) g h + \left[(F_{\mathrm{v}1} + F_{\mathrm{v}2}) + kv_2^2 \right] s = 14\ \mathrm{MJ}.$$

3 body

c) Při rychlosti $v_0 = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ působí proti pohybu síla o velikosti

$$F_0 = F_{\mathrm{v}1} + kv_0^2,$$

motor na dráze $s = 4{,}6\ \mathrm{km}$ vykoná práci

$$W_0 = F_0 s = \left(F_{\mathrm{v}1} + kv_0^2 \right) s.$$

Spotřeba při jízdě do kopce je v případě a)

$$V_{\mathrm{sp}1} = V_{\mathrm{sp}0} \cdot \frac{W_1}{W_0} = V_{\mathrm{sp}0} \cdot \frac{m_1 g h + \left(F_{\mathrm{v}1} + kv_1^2 \right) s}{\left(F_{\mathrm{v}1} + kv_0^2 \right) s} = 15\ \mathrm{l/100\ km},$$

v případě b)

$$V_{\mathrm{sp}2} = V_{\mathrm{sp}0} \cdot \frac{W_2}{W_0} = V_{\mathrm{sp}0} \cdot \frac{(m_1 + m_2) g h + \left[(F_{\mathrm{v}1} + F_{\mathrm{v}2}) + kv_2^2 \right] s}{\left(F_{\mathrm{v}1} + kv_0^2 \right) s} = 17\ \mathrm{l/100\ km}.$$

4 body

6.a) Při rovnoměrném tažení kvádru nahoru platí

$$F_1 = F_G \sin \alpha + f F_G \cos \alpha,$$

při rovnoměrném tažení kvádru dolů

$$F_2 + F_G \sin \alpha = f F_G \cos \alpha,$$

kde α je sklon nakloněné roviny. Rovnice sečteme:

$$F_1 + F_2 = 2 f F_G \cos \alpha.$$

Dosazením

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$$

po úpravě dostaneme

$$f = \frac{F_1 + F_2}{2F_G} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}.$$

2 body

b) Měření bylo provedeno na nakloněné rovině délky l = 70 cm, jednou byla polepena tenkou vrstvou molitanu, podruhé na ni byla položena polystyrénová deska. Výška nakloněné roviny byla měřena s přesností ± 0,5 cm. Siloměr měl rozsah 0 až 2,5 N, nejmenší dílek stupnice měl hodnotu 0,1 N. Tíhová síla kvádru změřená siloměrem byla 2,2 N.

Deska s molitanovým povrchem:

Číslo měření	$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{F_1}{\text{N}}$	$\frac{F_2}{\text{N}}$	f
1	0	1,6	1,6	0,73
2	7,5	1,8	1,5	0,75
3	11,5	1,9	1,3	0,74
4	18	2,1	1,1	0,75
5	23	2,4	0,8	0,77
6	28	2,5	0,4	0,72
Aritmetický průměr				0,75

$\Delta f = 0{,}1$, $\delta f = 1\,\%$

Deska s polystyrénovým povrchem

Číslo měření	$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{F_1}{\text{N}}$	$\frac{F_2}{\text{N}}$	f
1	0	0,7	0,7	0,32
2	3	0,7	0,6	0,30
3	6,5	0,8	0,5	0,30
4	10	0,9	0,4	0,30
5	12,5	1,1	0,3	0,32
6	16,5	1,2	0,2	0,33
Aritmetický průměr				0,31

$\Delta f = 0{,}1$, $\delta f = 3\,\%$

Závěr: Součinitel smykového tření mezi daným dřevěným povrchem a molitanem je 0,75 ± 0,1 s relativní odchylkou 1 %, mezi dřevěným povrchem a polystyrénem 0,31 ± 0,1 s relativní odchylkou 3 %.

8 bodů

7.a) Z podmínky rovnováhy

$$5m_1 g \sin\alpha = m_2 g$$

plyne

$$m_2 = 5m_1 \sin\alpha = 2{,}87 m_1.$$

2 body

b) Jelikož $2m_1 < m_2$, bude závaží stoupat a vozíky pojedou po nakloněné rovině dolů. Z pohybové rovnice

$$7m_1a = 5m_1g\sin\alpha - 2m_1g$$

plyne

$$a = \frac{5\sin\alpha - 2}{7}g = 1{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

Závěs bude napínán silou

$$F = 5m_1g\sin\alpha - 5m_1a = \frac{10}{7}m_1g(1+\sin\alpha) = 2{,}25m_1g$$

nebo

$$F = 2m_1g + 2m_1a = \frac{10}{7}m_1g(1+\sin\alpha) = 2{,}25m_1g.$$

2 body

c) Jelikož soustava je stejná jako v b), jediná možnost pohybu vozíků při jejich překlápění je dolů ve směru nakloněné roviny. Aby soustava zůstala v klidu, musí být splněna nerovnice

$$5m_1g\sin\alpha - Nfm_1g\cos\alpha \leq 2m_1g.$$

Z ní plyne

$$N \geq \frac{5\sin\alpha - 2}{f\cos\alpha} = 3{,}53.$$

Nejmenší přirozené číslo vyhovující nerovnici je číslo 4, musíme proto převrátit aspoň čtyři z pěti vozíků.

4 body