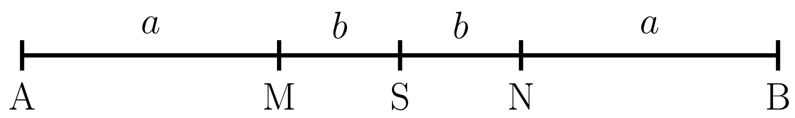
Řešení úloh krajského kola 57. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autor úloh: J. Thomas

1.a) Označme místa setkání M a N (obr. R1)



Obr. R1

1 bod

Vzdálenosti |AM| a |BN| označíme a, vzdálenost míst setkání M a N od středu vzdálenosti míst A a B označíme b.

Pro dobu, kdy oba dorazí z místa A do místa M platí:

$$\frac{a}{v_1} = \frac{a}{v_2} + t_1. \tag{1}$$

1 bod

Pro dobu, kdy oba dorazí z místa A do místa N platí:

$$\frac{a+2b}{v_1} = \frac{3a+2b}{v_2} + t_1. \tag{2}$$

1 bod

Pro dobu, kdy oba dorazí na cestě tam z místa M zpět do místa A platí:

$$\frac{3a+4b}{v_1} = \frac{3a+4b}{v_2} + t_2. \tag{3}$$

1 bod

Ze vztahu (1) plyne:

$$a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = t_1. \tag{4}$$

Ze vztahu (3) plyne:

$$(3a+4b)\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = t_2. \tag{5}$$

Vydělením (5) : (4)

$$\frac{3a+4b}{a} = \frac{t_2}{t_1},$$

odkud po úpravě

$$b = \frac{a\,(t_2 - 3t_1)}{4t_1}.$$

Odečtením rovnic (2) − (1):

$$\frac{2b}{v_1} = \frac{2a+2b}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{a+b}{b} = \frac{a + \dfrac{a\,(t_2-3t_1)}{4t_1}}{\dfrac{a\,(t_2-3t_1)}{4t_1}} = \frac{t_1+t_2}{t_2-3t_1} = 4.$$

3 body

b) Za čas Δt ujde chodec dráhu $2b$. Platí tedy:

$$\Delta t = \frac{2b}{v_1} = \frac{\dfrac{a\,(t_2 - 3t_1)}{2t_1}}{v_1} = \frac{a\,(t_2 - 3t_1)}{2t_1 v_1}.$$

Ze vztahu (4) vyjádříme a: $a = \dfrac{v_1 v_2 t_1}{v_2 - v_1}$ a po dosazení dostáváme:

$$\Delta t = \frac{2b}{v_1} = \frac{a\,(t_2 - 3t_1)}{2t_1 v_1} = \frac{\dfrac{v_1 v_2 t_1}{v_2 - v_1} \cdot (t_2 - 3t_1)}{2t_1 v_1} = \frac{t_2 - 3t_1}{2\dfrac{v_2 - v_1}{v_2}} =$$

$$= \frac{t_2 - 3t_1}{2\left(1 - \dfrac{t_2 - 3t_1}{t_1 + t_2}\right)} = \frac{(t_1 + t_2)\,(t_2 - 3t_1)}{8t_1} = 8 \text{ minut.}$$

3 body

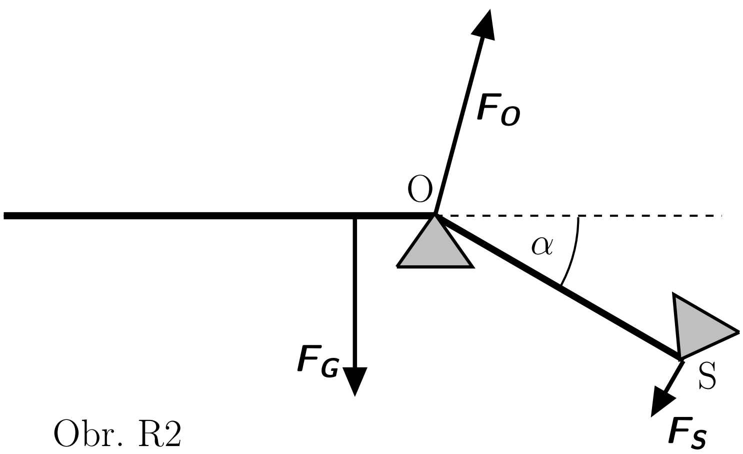
2.a) Na páku působí tři síly; tíhová síla $\boldsymbol{F_G}$, která má působiště v těžišti páky, reakce podpěry $\boldsymbol{F_O}$ v bodě O a reakce zarážky $\boldsymbol{F_S}$ v bodě S, které jsou v rovnováze. Nejprve určíme vzdálenost těžiště od volného konce páky. Počátek soustavy zvolíme v bodě O a osu x vodorovně zleva doprava. Pro x–ovou souřadnici těžiště páky pak platí:

$$x_T = \frac{-\dfrac{3}{5}m \cdot \dfrac{3}{10}\ell + \dfrac{2}{5}m \cdot \dfrac{1}{5}\ell \cos\alpha}{m} = \frac{-9 + 4\cos\alpha}{50}\ell = -0{,}111\ell.$$

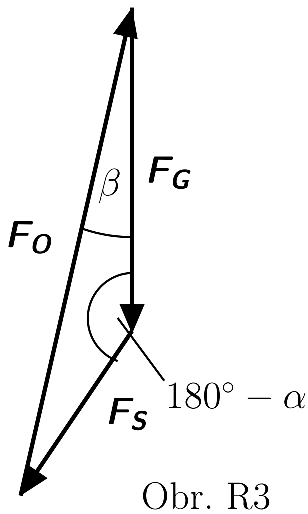
Velikost síly F_S určíme pomocí momentové věty vzhledem k bodu O:

$$mg \cdot 0{,}111\ell = F_S \frac{2}{5}\ell \quad \Rightarrow \quad F_S = 0{,}277mg.$$

3 body



Obr. R2



Obr. R3

Protože síly jsou v rovnováze (obr. R3), užitím kosinové věty dostaneme:

$$F_O^2 = F_G^2 + F_S^2 + 2F_G F_S \cos\alpha,$$

$$F_O = \sqrt{F_G^2 + F_S^2 + 2F_G F_S \cos\alpha} = mg\sqrt{1 + 0{,}277^2 + 0{,}48} = 1{,}25mg.$$

Úhel β, který svírá reakce v bodě O se svislým směrem, určíme pomocí sinové věty:

$$\frac{\sin\beta}{F_S} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{F_O} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{F_S \sin\alpha}{F_O} = 0{,}1108 \quad \Rightarrow \quad \beta = 6{,}4^\circ.$$

3 body

b) Zavěsíme-li na volný konec páky závaží o stejné hmotnosti jako je hmotnost páky, můžeme nahradit dvě tíhové síly jednou silou $\boldsymbol{F_{G1}}$, která bude mít velikost $2mg$ a jejíž působiště bude ve vzdálenosti $0{,}245\ell$ od volného konce páky. Velikost síly F_{S1} pak z momentové věty:

$$2mg \cdot 0{,}355\ell = F_{S1}\frac{2}{5}\ell \quad \Rightarrow \quad F_{S1} = 1{,}78mg.$$

Užitím kosinové věty:

$$F_{O1}^2 = F_{G1}^2 + F_{S1}^2 + 2F_{G1}F_{S1}\cos\alpha,$$

$$F_{O1} = \sqrt{F_{G1}^2 + F_{S1}^2 + 2F_{G1}F_{S1}\cos\alpha} = mg\sqrt{1 + 1{,}78^2 + 3{,}08} = 2{,}69mg.$$

Pro úhel β_1 pak platí $\sin\beta_1 = \dfrac{F_{S1}\sin\alpha}{F_{O1}} = 0{,}3308 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 19{,}3^\circ.$

4 body

3.a) Na kapičku působí tíhová síla, která je v rovnováze se silou elektrickou:

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g = Q\frac{U}{d} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{4\pi r^3 \varrho g d}{3U} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \doteq 2e.$$

4 body

b) Před zapnutím elektrického pole jsou v rovnováze tíhová síla se silou odporovou:

$$F_G = F_o,$$

$$mg = 6\pi\eta r v_1. \tag{1}$$

Kapička se pohybuje rovnoměrně, proti tíhové síle působí síla elektrická a síla odporová:

$$F_G = F_e + F_o,$$

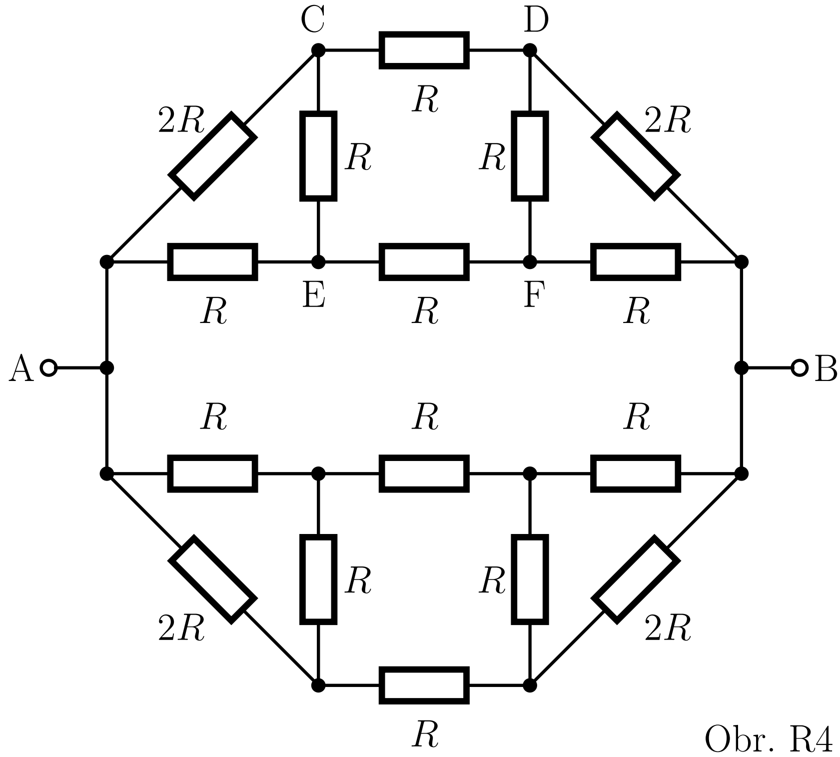
$$mg = Q\frac{U_1}{d} + 6\pi\eta r v_2 = Q\frac{U_1}{d} + 6\pi\eta r 0{,}4 v_1. \tag{2}$$

Ze vztahu (1) vyjádříme v_1: $v_1 = \dfrac{mg}{6\pi\eta r}$ a dosadíme do vztahu (2):

$$mg = Q\frac{U_1}{d} + 0,4mg \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{0{,}6mgd}{U_1} = 4{,}8 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 3e.$$

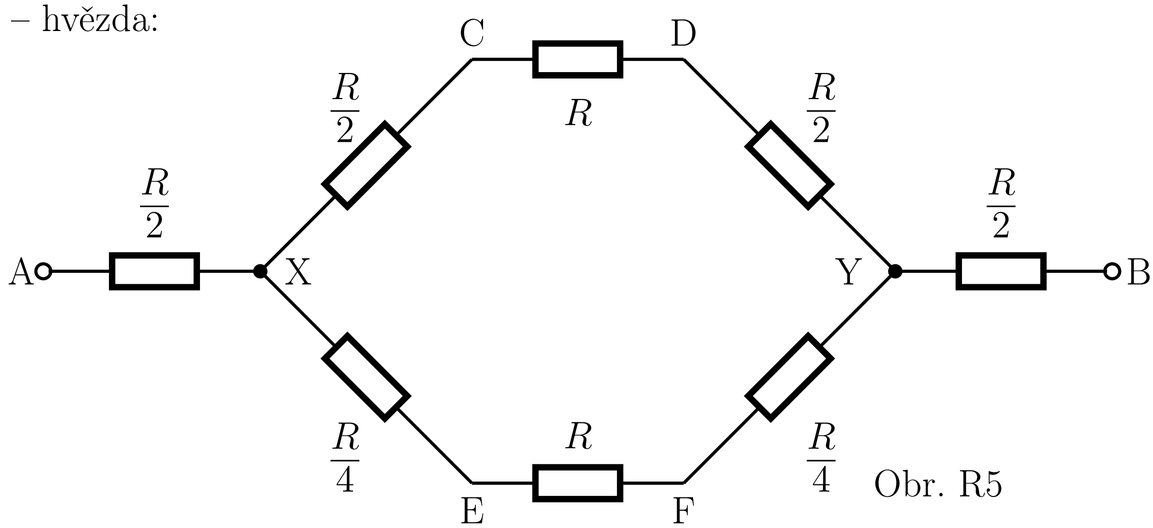
6 bodů

4.a) Vzhledem k souměrnosti obvodu nebude dvěma prostředními rezistory v ose AB procházet proud a můžeme je ze sítě vynechat. Schéma překreslíme:



Obr. R4

Pro výpočet odporu v horní polovině sítě můžeme použít transfiguraci trojúhelník – hvězda:



Obr. R5

Odpor v horní polovině sítě pak bude $R_H = \dfrac{13}{7}R$ a celkový odpor mezi body A a B pak bude $R_C = \dfrac{R_H}{2} = \dfrac{13}{14}R$.

5 bodů

b) Užitím náhradního schématu po transfiguraci trojúhelník – hvězda určíme potenciály v jednotlivých uzlových bodech. Zvolíme-li potenciál bodu B roven nule, pak postupně: $\varphi_Y = \dfrac{\frac{R}{2}}{R_H}U_e = \dfrac{7}{26}U_e$; $\varphi_X = U_e - \dfrac{7}{26}U_e = \dfrac{19}{26}U_e$; $\varphi_D = \dfrac{5}{13}U_e$; $\varphi_C = \dfrac{8}{13}U_e$; $\varphi_F = \dfrac{9}{26}U_e$; $\varphi_E = \dfrac{17}{26}U_e$; $\varphi_A = U_e$.

Mezi body C a D prochází tedy proud $I_{CD} = I_4 = \dfrac{\varphi_C - \varphi_D}{R} = \dfrac{3}{13}\dfrac{U_e}{R}$; mezi body E a F prochází proud $I_{EF} = I_5 = \dfrac{\varphi_E - \varphi_F}{R} = \dfrac{4}{13}\dfrac{U_e}{R}$. Protože potenciál bodu C je menší, než potenciál bodu E, prochází mezi těmito body proud $I_{EC} = I_3 = \dfrac{\varphi_E - \varphi_C}{R} = \dfrac{1}{26}\dfrac{U_e}{R}$ od bodu E k bodu C, zatímco stejně velký proud prochází od bodu D k bodu F v pravé části schématu.

Vrátíme se k původnímu schématu:

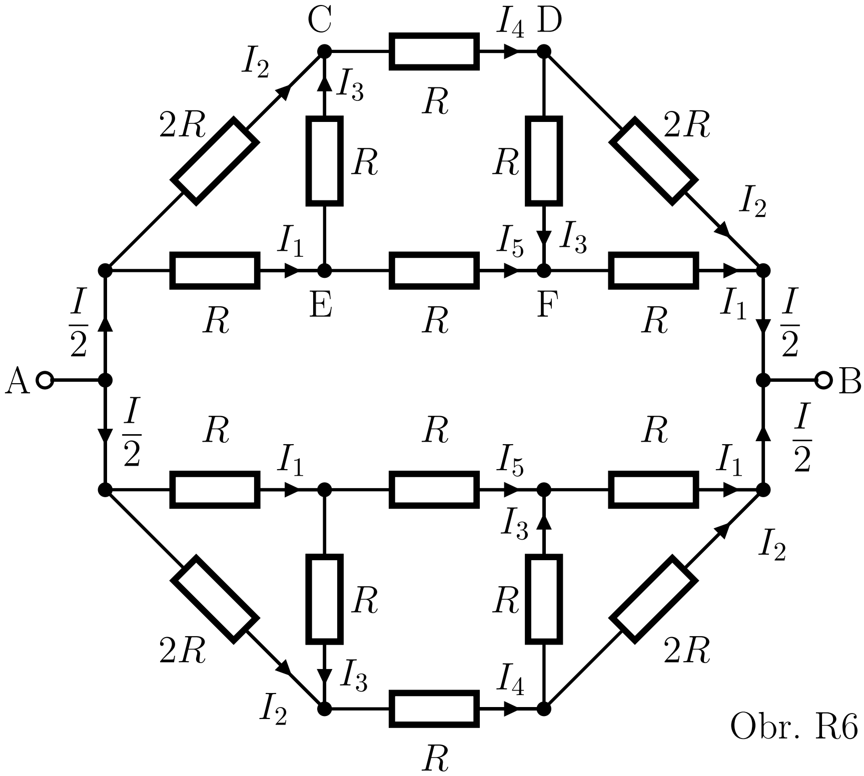
$$I_{AC} = I_2 = I_4 - I_3 = \frac{U_e - \varphi_C}{2R} = \frac{5}{26}\frac{U_e}{R},$$

$$I_{AE} = I_1 = I_3 + I_5 = \frac{U_e - \varphi_E}{R} = \frac{9}{26}\frac{U_e}{R}$$

5 bodů

Alternativní řešení

Pro výpočet proudů využijeme Kirchhoffovy zákony. Vzhledem k symetrii obvodu je neznámých proudů jen pět, potřebujeme tedy 5 rovnic.



Obr. R6

$$\frac{I}{2} = I_1 + I_2$$

$$I_2 = I_4 - I_3$$

$$I_1 - I_3 = I_5$$

$$2RI_2 - RI_3 - RI_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 2I_2 - I_3,$$

$$RI_4 + 2RI_3 - RI_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_4 + 2I_3 = I_5.$$

Postupnou úpravou určíme: $I_1 = \dfrac{9}{28}I$; $I_2 = \dfrac{5}{28}I$; $I_3 = \dfrac{1}{28}I$; $I_4 = \dfrac{3}{14}I$; $I_5 = \dfrac{2}{7}I$.

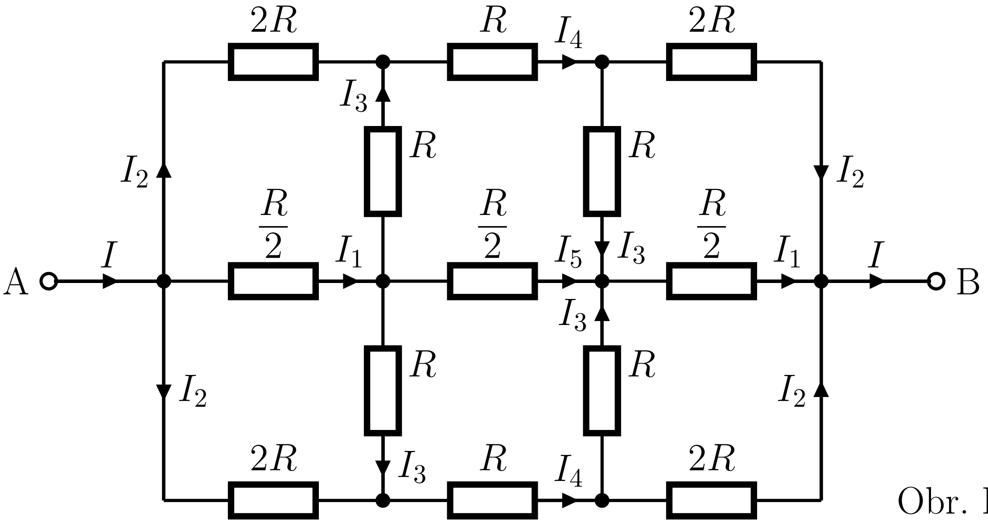
Z větve A-E-F-B pro napětí mezi body A a B dostáváme:

$$U_e = 2RI_1 + RI_5 = \frac{13}{14}RI \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{13}{14}R.$$

Pro jednotlivé proudy pak platí $I_1 = \frac{9}{28}I = \frac{9U_e}{26R}$; $I_2 = \frac{5}{28}I = \frac{5U_e}{26R}$; $I_3 = \frac{1}{28}I = \frac{U_e}{26R}$; $I_4 = \frac{3}{14}I = \frac{3}{13}\frac{U_e}{R}$; $I_5 = \frac{2}{7}I = \frac{4U_e}{13R}$.

Jiné alternativní řešení části b):

Rezistory, kterými neprochází proud, můžeme nahradit zkratem. Paralelně řazené rezistory nahradíme jedním rezistorem o polovičním odporu. Schéma pak bude vypadat takto:



Obr. R7

Z rovnic $I = 2I_2 + I_1$; $I_2 + I_3 = I_4$; $I_1 = 2I_3 + I_5$; $2RI_2 - RI_3 - R\frac{I_1}{2} = 0$; $2RI_3 + RI_4 = \frac{1}{2}RI_5$ obdržíme:

$$I_1 = \frac{9}{14}I;\ I_2 = \frac{5}{28}I;\ I_3 = \frac{1}{28}I;\ I_4 = \frac{3}{14}I;\ I_5 = \frac{4}{7}I.$$

Pro napětí mezi body A a B platí

$$U_e = \frac{R}{2}2I_1 + \frac{R}{2}I_5 = \frac{13}{14}RI \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{13}{14}R.$$

Pro jednotlivé proudy pak

$$I_1 = \frac{9}{14}I = \frac{9U_e}{13R};\ I_2 = \frac{5}{28}I = \frac{5U_e}{26R};\ I_3 = \frac{1}{28}I = \frac{U_e}{26R};\ I_4 = \frac{3}{14}I = \frac{3}{13}\frac{U_e}{R};$$
$$I_5 = \frac{4}{7}I = \frac{4U_e}{13R}.$$

Proudy I_1 a I_5 jsou proudy, které se větví do dvou rezistorů s odporem R, proto mají dvakrát větší hodnotu, než při řešení prvním způsobem.