Řešení úloh 1. kola 57. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 7), J. Jírů (4, 6) a P. Šedivý (5)

1.a) Automobily konají posuvný pohyb, přičemž ve směru pohybu na ně působí pouze třecí síla od vozovky na hnací nápravu. Největší zrychlení automobilů určíme ze vztahů: $a_1 = \dfrac{fN_1}{m}$ u automobilu s předním náhonem a $a_2 = \dfrac{fN_2'}{m}$ u automobilu se zadním náhonem, kde N_1 a N_2' jsou velikosti normálových složek reakcí, kterými působí vozovka na hnací kola v místě dotyku (obr. R1). S větším zrychlením se auta nemohou pohybovat – kola by prokluzovala.

Síly kolmé k vozovce jsou v rovnováze, součet momentů všech sil vzhledem k ose jdoucí těžištěm je nulový. U automobilu s předním náhonem (obr. R1a) tedy platí

$$N_1 + N_2 = mg, \qquad N_2 \cdot \frac{d}{2} = (mg - N_1)\frac{d}{2} = N_1\frac{d}{2} + fN_1 \cdot h,$$

z toho

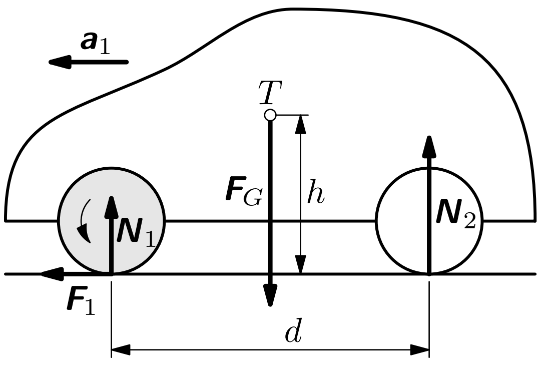
$$N_1 = \frac{mgd}{2(d + fh)}.$$

U automobilu se zadním náhonem (obr. R1b) platí

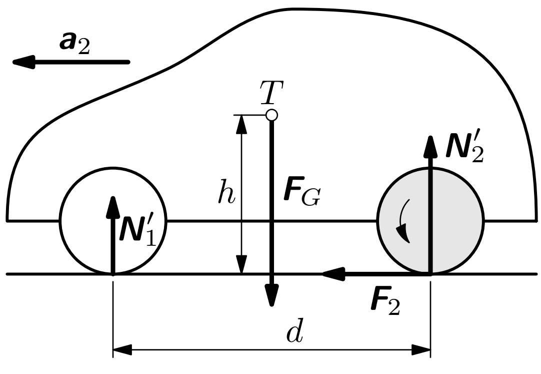
$$N_1' + N_2' = mg, \qquad N_1' \cdot \frac{d}{2} = (mg - N_2')\frac{d}{2} = N_2'\frac{d}{2} - fN_2' \cdot h,$$

z toho

$$N_2' = \frac{mgd}{2(d - fh)}.$$



Obr. R1a



Obr. R1b

Pro zrychlení automobilů pak:

$$a_1 = \frac{fgd}{2(d + fh)} = 3{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad a_2 = \frac{fgd}{2(d - fh)} = 4{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

5 bodů

b) Automobily se rozjíždí rovnoměrně zrychleně, proto

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = 3{,}5\ \mathrm{s}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = 2{,}9\ \mathrm{s}.$$

Automobil s pohonem na zadní nápravu se tedy rozjíždí s větším zrychlením a bude u značky 20 m o 0,6 s dříve.

2 body

c) Rychlosti automobilů na značce budou $v_1 = \sqrt{2sa_1}$ a $v_2 = \sqrt{2sa_2}$. K tomu je zapotřebí, aby okamžitý výkon automobilu s předním náhonem byl

$$P_1 = F_1 v_1 = m a_1 \sqrt{2sa_1} = 49 \text{ kW}$$

a okamžitý výkon automobilu se zadním náhonem aby byl

$$P_2 = F_2 v_2 = m a_2 \sqrt{2sa_2} = 89 \text{ kW}.$$

Výkon automobilů tedy stačí pro dosažení vypočítaných časů.

3 body

2.a) Situaci po ustálení hladiny znázorňuje obr. R2. Podle Archimedova zákona se bude velikost tíhové síly rovnat velikosti síly vztlakové:

$$\pi r^2 h_1 \varrho_0 g = \pi r^2 h \varrho g \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{\varrho}{\varrho_0} h = 3{,}0 \text{ cm}.$$

2 body

b) Objem kapaliny vytlačené nad původní úroveň hladiny je roven objemu ponořené části tělesa pod původní úrovní hladiny:

$$\pi (R^2 - r^2) h_2 = \pi r^2 (h_1 - h_2) \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 \frac{r^2}{R^2} = h \frac{\varrho r^2}{\varrho_0 R^2} = 1{,}3 \text{ cm}.$$

3 body

c) Přírůstek vnitřní energie soustavy je roven rozdílu úbytku potenciální energie kotouče a práce potřebné na zvýšení potenciální energie vody vytlačené z prostoru pod původní úrovní hladiny. Hmotnost této vody je

$$m = \pi r^2 (h_1 - h_2) \varrho_0 = \pi r^2 \varrho h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

a její těžiště se zvedne o $\dfrac{h_1 - h_2}{2} + \dfrac{h_2}{2} = \dfrac{h_1}{2} = \dfrac{h\varrho}{2\varrho_0}$.

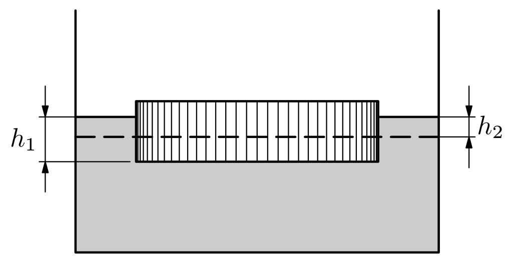
Vnitřní energie soustavy se tedy zvýší o

$$\pi r^2 h \varrho g (H + h_1 - h_2) - mg \frac{h_1}{2} = \pi r^2 h \varrho g \left[H + h \frac{\varrho}{\varrho_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] -$$

$$- \frac{\pi r^2 \varrho^2 h^2 g}{2\varrho_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \pi r^2 h \varrho g \frac{H + \varrho h}{2\varrho_0} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) =$$

$$= 1{,}848 \text{ J} - 0{,}048 \text{ J} \doteq 1{,}80 \text{ J}.$$

5 bodů



Obr. R2

3. Při ději 1-2-3-4 plyn přijme teplo

$$Q = Q_{12} + Q_{13} = \frac{5}{2} nR\,(T_2 - T_1) + \frac{7}{2} nR\,(T_3 - T_2)\,. \tag{1}$$

Teplotu T_2 určíme pomocí Charlesova zákona:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4}.$$

Protože $p_2 = p_3$, $p_1 = p_4$ a $T_2 = T_4$, po úpravě dostaneme

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}.$$

Odtud $T_2 = \sqrt{T_1 T_3} = 2T_1$.

3 body

Dosazením do vztahu (1) dostáváme

$$Q = \frac{5}{2} nR\,(T_2 - T_1) + \frac{7}{2} nR\,(T_3 - T_2) = \frac{19}{2} nRT_1.$$

V cyklu 2-3-4-A-B-C-2 plyn přijímá teplo Q_1 na úsecích C-2, 2-3 a A-B. Je tedy zřejmé, že

$$Q_1 = Q - Q_{1\mathrm{C}} + Q_{\mathrm{AB}} = Q - \frac{5}{2} nR\,(T_\mathrm{C} - T_1) + \frac{5}{2} nR\,(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A})\,. \tag{2}$$

Nyní potřebujeme vyjádřit teploty T_A, T_B a T_C pomocí T_1. Analogicky s cyklem 1-2-3-4-1 a protože $T_\mathrm{B} = T_2 = 2T_1$, můžeme napsat

$$T_\mathrm{A} = T_\mathrm{C} = \sqrt{T_1 T_\mathrm{B}} = \sqrt{2}\,T_1.$$

4 body

Dosazením do vztahu (2) získáme:

$$Q_1 = Q - \frac{5}{2} nRT_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{5}{2} nRT_1 \left(2 - \sqrt{2}\right) = \frac{19}{2} nRT_1 - \frac{5}{2} nRT_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) +$$
$$+ \frac{5}{2} nRT_1 \left(2 - \sqrt{2}\right) = nRT_1 \left(17 - 5\sqrt{2}\right) = \frac{2}{19} Q \left(17 - 5\sqrt{2}\right) = 1{,}05Q.$$

Číselně: $T_2 = T_4 = T_\mathrm{B} = 600\ \mathrm{K}$, $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{C} = 424\ \mathrm{K}$, $Q_1 = 26{,}1\ \mathrm{kJ}$.

3 body

4.a) Ze vzorce $f = K\frac{\sqrt{F}}{l}$ plyne, že při stejné napínající síle krajních strun vydává struna délky l_0 základní tón s dvojnásobnou frekvencí (o oktávu výš) než struna s dvojnásobnou délkou $2l_0$. První člen aritmetické posloupnosti udávající délky strun je $2l_0$, diference má hodnotu $-\frac{l_0}{12}$. Délka struny s pořadím n je pak dána vzorcem

$$l_n = 2l_0 - \frac{l_0}{12} n = l_0 \left(2 - \frac{n}{12}\right).$$

Frekvenci základního tónu struny s pořadím n udává vzorec

$$f_n = \sqrt[12]{2^n} \cdot f_0 = 2^{\frac{n}{12}} \cdot f_0.$$

Vzorce dosadíme do vztahu pro velikost napínající síly

$$F_n = \left(\frac{l_n f_n}{K}\right)^2 = \left[\frac{l_0\left(2-\frac{n}{12}\right)2^{\frac{n}{12}}\cdot f_0}{K}\right]^2,$$

čímž dostaneme posloupnost velikostí napínajících sil. První člen této posloupnosti získáme volbou $n = 0$:

$$F_0 = \left(\frac{2l_0\cdot f_0}{K}\right)^2.$$

Hledaná funkční závislost pak je

$$\frac{F_n}{F_0} = \left[\left(1-\frac{n}{24}\right)\cdot 2^{\frac{n}{12}}\right]^2 = \left(1-\frac{n}{24}\right)^2\cdot 2^{\frac{n}{6}}$$

6 bodů

b) Do prvního sloupce Excelu vložíme číslo n, do druhého zapíšeme vzorec pro poměr F_n/F_0 a za poslední hodnotu vzorec pro součet:

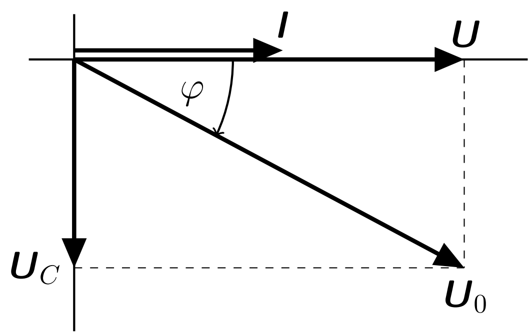
n	0	1	2	3	4	5	6
F/F_0	1,0000	1,0309	1,0587	1,0828	1,1024	1,1167	1,1250
n	7	8	9	10	11	12	Součet
F/F_0	1,1264	1,1199	1,1049	1,0803	1,0456	1,0000	13,9934

Z tabulky plyne: Nejvíce je napínána struna s pořadím $n = 7$, nejméně jsou napínány obě krajní struny. Celková síla, kterou působí struny na rám harfy, má velikost $F = 13{,}99F_0$.

3 body

5.a) Voltampérová charakteristika je graf funkce, která vyjadřuje závislost proudu procházejícího žárovkou na jejím napětí. Z fázorového diagramu na obr. R3 odvodíme vztahy mezi síťovým napětím U_0, napětím na žárovce U, napětím na kondenzátoru U_C a proudem v obvodu I:

$$U_0^2 = U^2 + U_C^2 = U^2 + X_C^2 I^2 = U^2 + \frac{I^2}{\omega^2 C^2}.$$



Obr. R3

2 body

Z toho

$$I = \omega C\sqrt{U_0^2 - U^2}. \tag{1}$$

Tento vztah také vyjadřuje proud v obvodu jako funkci napětí na žárovce. Její definiční obor je interval $\langle 0, U_0\rangle$. Graf této funkce protíná voltampérovou charakteristiku žárovky v bodě, jehož souřadnice určují řešení úlohy.

Následující řešení bylo provedeno v Excelu. Tabulka voltampérové charakteristiky byla doplněna o výpočet funkce $f(U)$ vyjádřené vztahem (1).

U/V	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
I/mA	0	70	98	127	151	173	194	213	231	248	264	279	293
f(U)/mA	578	578	578	576	573	569	564	558	551	542	532	521	508

U/V	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
I/mA	307	320	333	346	358	370	381	392	403	414	424	434	444
f(U)/mA	493	477	459	438	415	389	360	326	285	236	169	0	

Z tabulky vyčteme, že oba grafy se protínají mezi hodnotami $U = 170$ V a $U = 180$ V, kde jsou rozdíly funkčních hodnot -19 mA a 21 mA. Lineární interpolací nalezneme souřadnice průsečíku obou grafů na obr. R4 a tím i řešení úlohy:

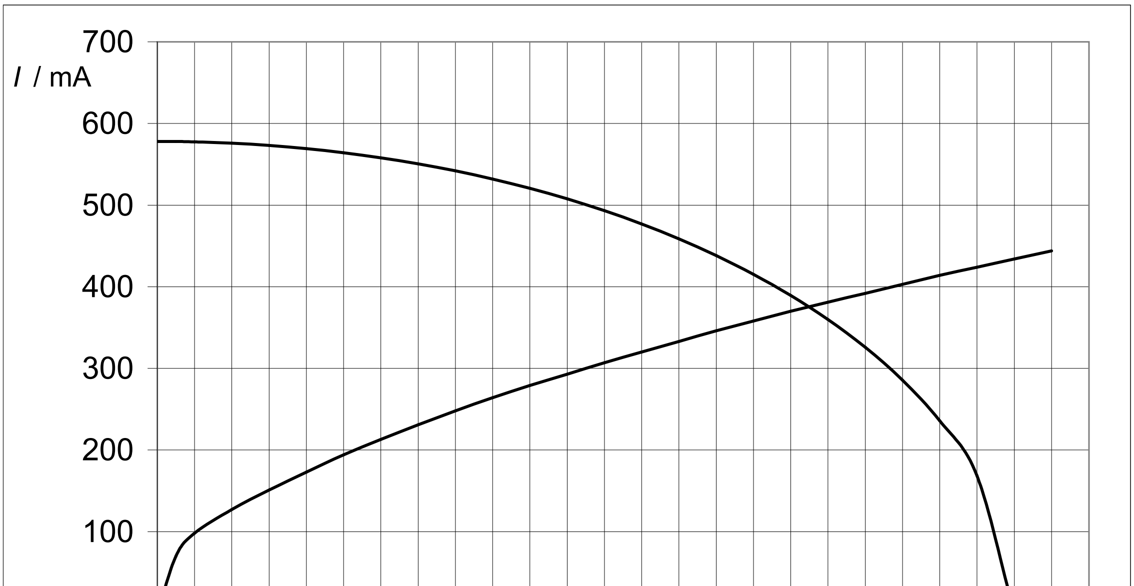
$$U = 170 \text{ V} + \frac{19}{40} \cdot 10 \text{ V} \approx 175 \text{ V}, \quad I = 370 \text{ mA} + \frac{19}{40} \cdot 11 \text{ mA} \approx 375 \text{ mA}.$$

6 bodů

Poznámka: Vztah (1) můžeme upravit na tvar $\dfrac{U^2}{U_0^2} + \dfrac{I^2}{\omega^2 C^2 U_0^2} = 1,$

který je formálně stejný jako středová rovnice elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$

známé z analytické geometrie. Grafem funkce (1) je čtvrtina elipsy, jejíž vodorovná poloosa odpovídá v měřítku grafu hodnotě $U_0 = 230$ V a svislá poloosa hodnotě $\omega C U_0 = 578$ mA. Řešení určuje průsečík elipsy a voltampérové charakteristiky žárovky v obr. R4.



Obr. R4

b) Výkon žárovky v obvodu s kondenzátorem je

$$P = UI = 175\ \text{V} \cdot 0{,}375\ \text{A} \approx 66\ \text{W}.$$

Celkový výkon v obvodu je

$$P_0 = U_0 I \cos\varphi = U_0 I \frac{U}{U_0} = UI = P.$$

Je stejný jako výkon žárovky, neboť průměrný výkon kondenzátoru během jedné periody střídavého napětí je nulový.

2 body

6.a) Úpravou dostaneme

$$f^2 = \frac{3g}{4\pi^2 m_0 l} \cdot m + \frac{3g}{4\pi^2 l},$$

tj.

$$A = \frac{3g}{4\pi^2 m_0 l}, \quad B = \frac{3g}{4\pi^2 l}.$$

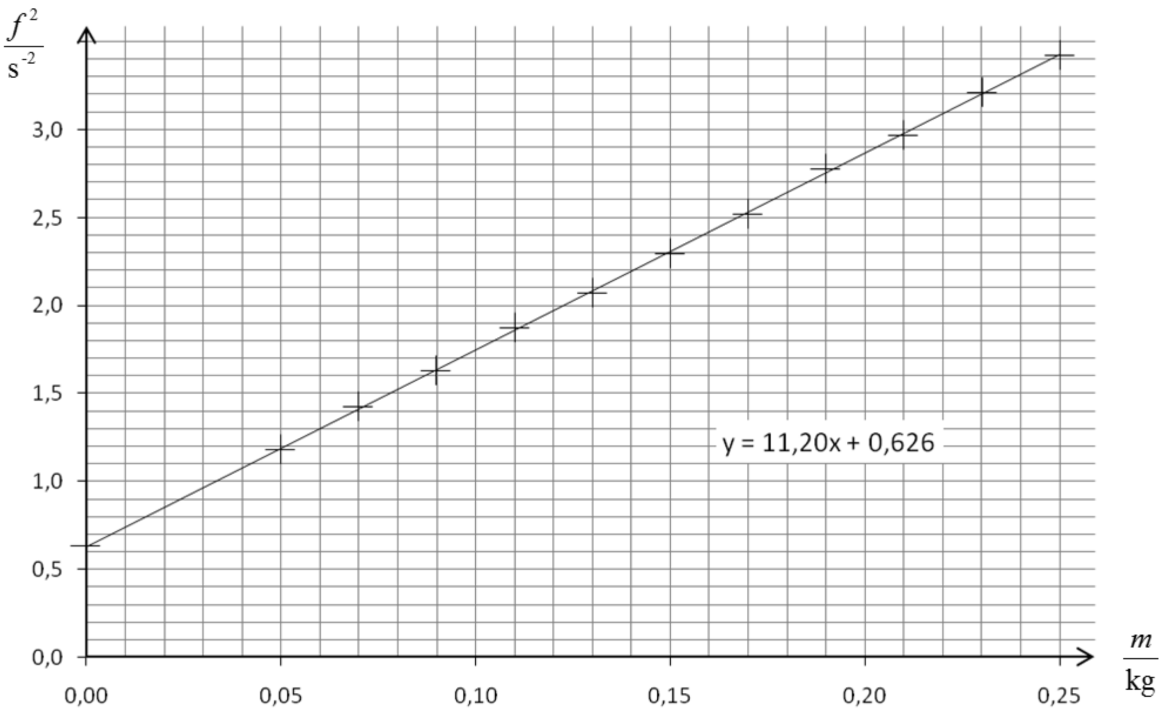
b) Měření provedeno závitovou tyčí délky 19,4 cm s průměrem 8 mm. Na technických vahách byla zjištěna hmotnost tyče $m = 55{,}5$ g, délka závěsu změřena délkovým měřidlem $l = 1{,}20$ m.

c) Tyč byla zatěžována soustavou závěsných závaží s rozsahem 50 g až 250 g, hmotnost měněna po 20 g. Měřena doba počtu $N = 30$ period.

Číslo měření	$\frac{m}{\text{kg}}$	$\frac{30T}{\text{s}}$	$\frac{T}{\text{s}}$	$\frac{f^2 = T^{-2}}{\text{s}^{-2}}$
1	0	37,77		0,631
2	0,050	27,63		1,179
3	0,070	25,16		1,422
4	0,090	23,50		1,630
5	0,110	21,93		1,871
6	0,130	20,85		2,070
7	0,150	19,80		2,296
8	0,170	18,89		2,522
9	0,190	18,00		2,778
10	0,210	17,41		2,967
11	0,230	16,74		3,212
12	0,250	16,21		3,425

d) Graf je na obr. R5.

e) Dosazením hodnoty $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ a naměřených hodnot m_0 a l z úkolu b) dostaneme $A = 11{,}2\ \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $B = 0{,}621\ \text{s}^{-2}$. V grafickém zpracování hodnota A s přesností na tři platné číslice souhlasí, hodnota B se liší o 0,8 %, což lze považovat za experimentální ověření úvodního vztahu.



Obr. R5

7.a) Teplo uvolněné při průchodu el. proudu topnou spirálou se spotřebuje na ohřátí vody v kalorimetru o $\Delta t = 80\ \ {}^\circ\mathrm{C}$ na bod varu a k jejímu částečnému odpaření. Jestliže R_1, R_2 jsou odpory topných spirál, platí

$$\frac{U^2}{R_1}\tau = mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v}}.$$

Podobně

$$R_2 = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}2ml_\mathrm{v}}.$$

Označíme-li x část vody, odpařené při sériovém zapojení spirál, pak

$$R_1 + R_2 = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v}} + \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}2ml_\mathrm{v}} = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + xml_\mathrm{v}},$$

$$(c\Delta t + 0{,}2l_\mathrm{v})(c\Delta t + xl_\mathrm{v}) + (c\Delta t + 0{,}6l_\mathrm{v})(c\Delta t + xl_\mathrm{v}) = (c\Delta t + 0{,}6l_\mathrm{v})(c\Delta t + 0{,}2l_\mathrm{v}),$$

$$x = \frac{0{,}12l_\mathrm{v}^2 - (c\Delta t)^2}{2l_\mathrm{v}c\Delta t + 0{,}8l_\mathrm{v}^2} = 0{,}09.$$

Odpaří se 9 % vody. **3 body**

b) Označíme-li y část vody, odpařené při paralelním zapojení spirál, pak

$$\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\dfrac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v}} \cdot \dfrac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}2ml_\mathrm{v}}}{\dfrac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v}} + \dfrac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}2ml_\mathrm{v}}} = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + yml_\mathrm{v}},$$

$$\frac{1}{2c\Delta t + 0{,}8l_\mathrm{v}} = \frac{1}{c\Delta t + yl_\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c\Delta t + 0{,}8l_\mathrm{v}}{l_\mathrm{v}} = 0{,}95.$$

Odpaří se 95 % vody. **3 body**

c) Použijeme-li dvojnásobné množství vody, pak v případě a) bude

$$R_1 + R_2 = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v}} + \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}2ml_\mathrm{v}} = \frac{U^2\tau}{2(mc\Delta t + xml_\mathrm{v})},$$

$$2(c\Delta t + 0{,}2l_\mathrm{v})(c\Delta t + xl_\mathrm{v}) + 2(c\Delta t + 0{,}6l_\mathrm{v})(c\Delta t + xl_\mathrm{v}) = \\ = (c\Delta t + 0{,}6l_\mathrm{v})(c\Delta t + 0{,}2l_\mathrm{v}),$$

$$x = \frac{0{,}12l_\mathrm{v}^2 - 0{,}8l_\mathrm{v}c\Delta t - 3(c\Delta t)^2}{4l_\mathrm{v}c\Delta t + 1{,}6l_\mathrm{v}^2} < 0.$$

Teplota tedy nedosáhne bodu varu. Označme Δt_1 dosažené zvýšení teploty v kalorimetru. Platí

$$\frac{U^2\tau}{R_1 + R_2} = 2mc\Delta t_1,$$

$$R_1 + R_2 = \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}6ml_\mathrm{v}} + \frac{U^2\tau}{mc\Delta t + 0{,}2ml_\mathrm{v}} = \frac{U^2\tau}{2mc\Delta t_1},$$

$$(c\Delta t + 0{,}2l_\mathrm{v})2c\Delta t_1 + (c\Delta t + 0{,}6l_\mathrm{v})2c\Delta t_1 = (c\Delta t + 0{,}6l_\mathrm{v})(c\Delta t + 0{,}2l_\mathrm{v}),$$

$$\Delta t_1 = \frac{(c\Delta t)^2 + 0{,}8l_\mathrm{v}c\Delta t + 0{,}12l_\mathrm{v}^2}{4c^2\Delta t + 1{,}6cl_\mathrm{v}} = 64\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

Voda v kalorimetru se tedy zahřeje na 84 °C.

4 body