

Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky

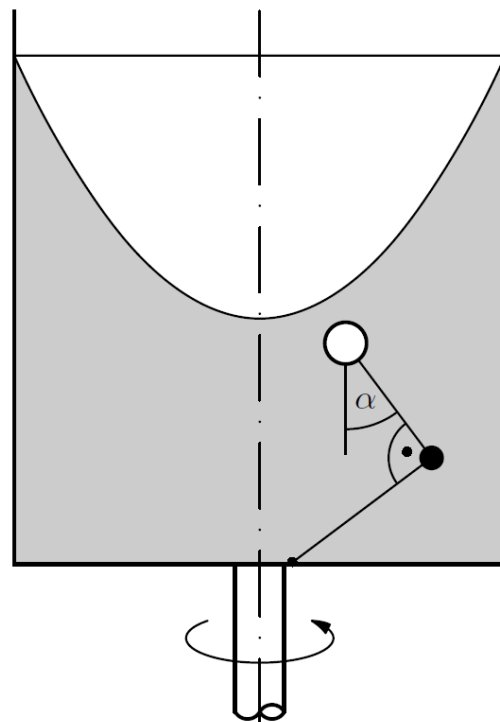
## Teoretické úlohy celostátního kola 57. ročníku FO

BÍLOVEC 2016

### 1. Kuličky v rotující nádobě

Ve válcové nádobě s vodou jsou ke dnu mimo osu válce připevněny na lehkém vlákně dvě malé homogenní kuličky, dřevěná a hliníková (obr. 1). Válcová nádoba se otáčí kolem svislé osy válce stálou úhlovou rychlostí. Po ustavení rovnováhy je vzdálenost hliníkové kuličky od osy otáčení 2krát větší než vzdálenost dřevěné kuličky. Vlákna přitom svírají navzájem pravý úhel a horní vlákno svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$ , pro který platí  $\sin \alpha = 3/5$ .

- Jaký směr mají vztlakové síly, kterými voda působí na kuličky?
- Jaký je poměr velikostí tahových sil, kterými je horní a dolní vlákno napínáno?
- Jaký je poměr objemů a poloměrů obou kuliček?



Obr. 1

Hustota dřeva  $\rho_1 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota hliníku  $\rho_2 = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota vody  $\rho_k = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Rozměry kuliček jsou v porovnání s jejich vzdáleností od osy rotace zanedbatelné. Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.

## 2. Sonda Cassini–Huygens

14. ledna 2005 přistál na Saturnově měsíci Titan modul Huygens, přepravovaný sondou Cassini. Měsíc Titan má poloměr  $R_T = 2576$  km a hmotnost  $M_T = 1,345 \cdot 10^{23}$  kg. Zanedbejte eliptičnost trajektorie Titanu a předpokládejte, že se Titan pohybuje po kruhové oběžné dráze s poloměrem  $r_T = 1,22 \cdot 10^6$  km s dobou oběhu  $T_T = 15,9$  dne.

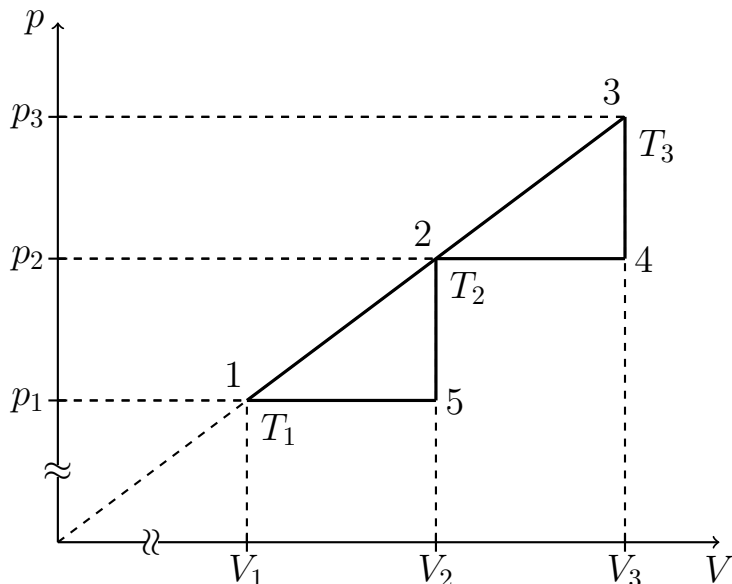
- Mezi dvěma po sobě následujícími opozicemi Saturnu uběhne doba  $T_{\text{syn}} = 378,1$  dne. Určete siderickou dobu oběhu Saturnu  $T_{\text{sid}}$  a velikost  $a_{\text{Sat}}$  velké poloosy jeho eliptické trajektorie. Určete vzdálenosti Saturnu od Slunce  $r_p$  v perihéliu a  $r_a$  v aféliu jeho trajektorie, je-li numerická excentricita jeho trajektorie  $\varepsilon = 0,056$ .
- Jaká byla rychlost  $v_a$  sondy při příletu k Saturnu, víte-li, že se Saturn nacházel v aféliu? Hohmannova trajektorie má tvar poloviny elipsy, která se ve výchozím bodě dotýká trajektorie Země a v koncovém bodě trajektorie Saturnu, přičemž tato místa leží na opačných stranách od Slunce.
- Během přistání modulu Huygens na povrchu Titanu se modul v jistém okamžiku od sondy Cassini vzdaloval rychlostí  $v = 6,0$  km  $\cdot$  s $^{-1}$  a vysílal k ní informace na nosné frekvenci  $f = 2098$  MHz. Jaká byla změna frekvence kmitů  $\Delta f$  vysílaných modulem a kmitů přijímaných sondou Cassini, způsobená Dopplerovým jevem?
- Z uvedených dat určete hmotnost planety Saturn  $M_{\text{Sat}}$  a gravitační zrychlení  $a_g$  na povrchu Titanu.

Gravitační konstanta  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N  $\cdot$  m $^2$   $\cdot$  kg $^{-2}$ , astronomická jednotka 1 au =  $1,50 \cdot 10^{11}$  m, hmotnost Slunce  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg. Gravitační potenciální energii soustavy dvou těles určíme ze vztahu  $E_p = -\frac{GmM}{r}$ ; celkovou energii tělesa pohybujícího se na eliptické dráze s velkou poloosou  $a$  ze vztahu  $E = -\frac{GmM}{2a}$ .

*Poznámka:* Ve skutečnosti se sonda Cassini–Huygens nepohybovala po Hohmannově trajektorii, ale po trajektorii mnohem složitější s využitím několikanásobné metody gravitačního praku.

### 3. Účinnost tepelného stroje

Tepelný stroj, jehož pracovní látkou je ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pracuje v cyklu 1–2–3–4–2–5–1, jehož  $pV$ -diagram je na obr. 2. Body 1, 2 a 3 leží na přímce procházející počátkem, bod 2 je střed úsečky 1–3. Nejnižší teplota cyklu je  $T_{\min}$ , nejvyšší teplota cyklu je  $k$ -krát vyšší.

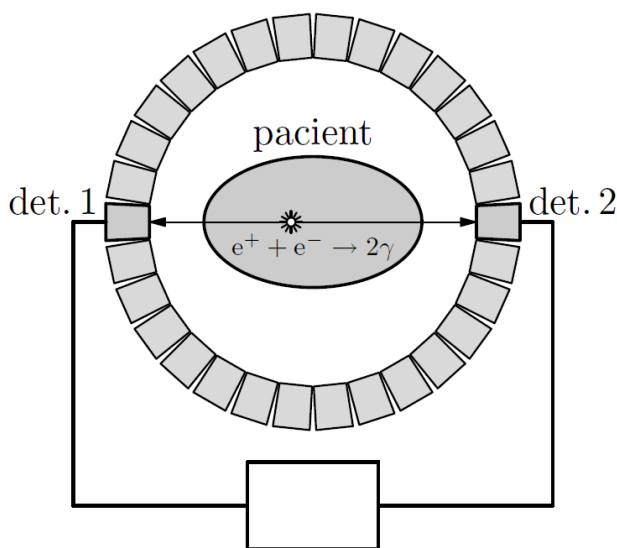


Obr. 2

- Určete teplotu  $T_2$ , poměry objemů  $\frac{V_2}{V_1}$  a  $\frac{V_3}{V_1}$ .
- Určete účinnost  $\eta$  stroje, pracujícího podle tohoto cyklu.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $T_{\min} = 300 \text{ K}$ ,  $k = 4$ .

Vnitřní energie ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je  $U = \frac{5}{2}nRT$ .



Obr. 3 Měřič časového rozdílu

#### 4. Pozitronová emisní tomografie (PET)

Při této metodě je pacientovi podáno radiofarmakum obsahující nuklid  $^{18}\text{F}$  vázaný na glukózu ve formě 2-deoxy-2-fluoro-D-glukózy (FDG). Radionuklid  $^{18}\text{F}$  má poločas rozpadu  $T = 109,8$  min. Pozitron  $e^+$ , který vzniká při jeho přeměně, se v tkáni pacienta na krátké dráze (několik mm) prakticky zastaví a anihiluje s elektronem  $e^-$ . Obě částice přitom zaniknou a z místa anihilace vylétnou současně a protisměrně dva fotony  $\gamma$ , každý s energií 511 keV. V nejjednodušších přístrojích pro PET jsou fotony zachycovány dvojicí proti sobě umístěných detektorů (obr. 3), které jsou propojeny obvodem, zaznamenávajícím fotony, které dopadly téměř současně. Obvod vyhodnocuje časový rozdíl  $\Delta t$  okamžiků dopadu fotonů a určí polohu místa, kde k anihilaci došlo. Z několika tisíc takových záchytů lze pak pomocí počítače vytvořit tomografický obraz vyšetřovaného.

Nuklid  $^{18}\text{F}$  se připravuje ostřelováním klidných atomů kyslíku  $^{18}\text{O}$  protony urychlenými v cyklotronu na energii 4,00 MeV. V urychlovači je magnetické pole o indukci  $B = 1,0$  T.

- Napište rovnici reakce přípravy nuklidu  $^{18}\text{F}$ , určete energii reakce  $E_{r1}$  v MeV a rozhodněte, zda při uvedené energii protonu může reakce proběhnout.
- Jakou rychlost získají protony v urychlovači a jaký je maximální poloměr jejich trajektorie před opuštěním cyklotronu? Při řešení můžete použít vztahy klasické fyziky.
- Napište rovnici  $\beta^+$  rozpadu nuklidu  $^{18}\text{F}$ , určete energii reakce  $E_{r2}$  v MeV a ověřte, že reakce může samovolně proběhnout.
- Vysvětlete, proč fotony vzniklé anihilací elektronu a pozitronu vyletí navzájem opačným směrem a proč má každý energii 511 keV. Určete vlnovou délku  $\lambda$  těchto fotonů.
- Měřič časového rozdílu mezi signály z detektorů zaznamenal u druhého detektoru časové zpoždění  $\Delta t = 0,70$  ns. Kde se nacházelo místo vzniku fotonů?
- V informacích pro pacienty se uvádí, že radioaktivita do druhého dne zmizí. Na kolik % původní aktivity klesne aktivita preparátu za 24 hodin?

Při řešení využijte některé z klidových hmotností částic a neutrálních atomů:

$m_e = 0,000\,549m_u$ ,  $m_p = 1,007\,276m_u$ ,  $m_n = 1,008\,665m_u$ ,  $m({}_1^1\text{H}) = 1,007\,825m_u$ ,  
 $m({}_1^2\text{H}) = 2,014\,102m_u$ ,  $m({}_8^{16}\text{O}) = 15,994\,915m_u$ ,  $m({}_8^{17}\text{O}) = 16,999\,132m_u$ ,  $m({}_8^{18}\text{O}) =$   
 $= 17,999\,161m_u$ ,  $m({}_9^{17}\text{F}) = 17,002\,095m_u$ ,  $m({}_9^{18}\text{F}) = 18,000\,938m_u$ ,  $m({}_9^{19}\text{F}) =$   
 $= 18,998\,403m_u$ ,  $m({}_{10}^{18}\text{Ne}) = 18,005\,708m_u$ ,  $m({}_{10}^{19}\text{Ne}) = 19,001\,880m_u$ ,  $m({}_{10}^{20}\text{Ne}_{10}) =$   
 $= 19,992\,440m_u$ ,  $m({}_{10}^{21}\text{Ne}) = 20,993\,847m_u$ . Atomová hmotnostní konstanta  $m_u =$   
 $= 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg, rychlost světla ve vakuu  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ , elementární náboj  
 $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C.