Řešení úloh krajského kola 57. ročníku fyzikální olympiády

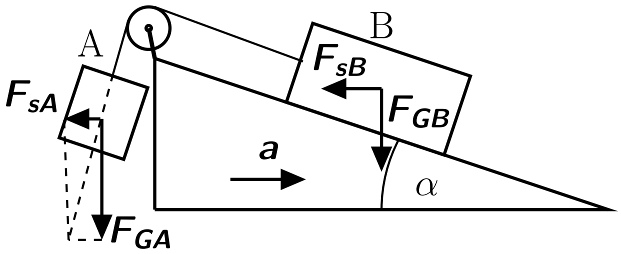
Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4) a J. Jírů (3)

1. Označíme-li m hmotnost tělesa A a M hmotnost tělesa B, pak platí $m = M \cdot \sin\alpha$.

1 bod

a) Na těleso A působí kromě síly tíhové také síla setrvačná směrem doleva, takže těleso A napíná nit silou o velikosti $m\sqrt{a^2+g^2}$.
Na těleso B působí jednak síla tíhová, která má složky $Mg\sin\alpha$ ve směru nakloněné roviny dolů a $Mg\cos\alpha$ kolmo k nakloněné rovině, a síla setrvačná, která má složky $Ma\cos\alpha$ ve směru nakloněné roviny vzhůru a $Ma\sin\alpha$ kolmo k nakloněné rovině. Složky kolmé k nakloněné rovině ovlivňují síly tření, které působí proti pohybu tělesa. Pak platí:



Obr. R1

$$m\sqrt{a^2+g^2} + Ma\cos\alpha = Mg\sin\alpha + fMa\sin\alpha + fMg\cos\alpha.$$

Po dosazení za m

$$M\sin\alpha\sqrt{a^2+g^2} + Ma\cos\alpha = Mg\sin\alpha + fMa\sin\alpha + fMg\cos\alpha,$$

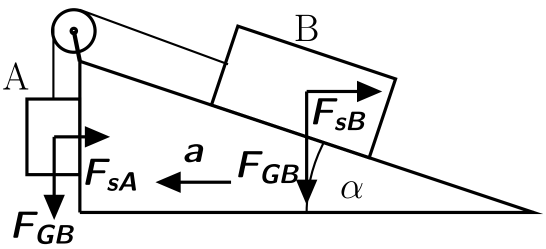
odkud úpravou dostáváme

$$f = \frac{\sin\alpha\sqrt{a^2+g^2} + a\cos\alpha - g\sin\alpha}{a\sin\alpha + g\cos\alpha}.$$

Číselně $f = 0{,}28$.

4 body

b) Pro $a \leq \dfrac{g}{\operatorname{tg}\alpha}$: Na těleso A působí směrem dolů jen tíhová síla, síla setrvačná, která je kolmá ke svislé rovině klínu, vyvolá sílu tření, která působí proti pohybu soustavy. Na těleso B působí kromě tíhové síly ještě setrvačná síla směrem vpravo, takže její pohybová složka působí ve směru nakloněné roviny a táhne těleso B dolů a její složka kolmá k nakloněné rovině snižuje sílu tření. Platí:



Obr. R2

$$mg + fma = Mg\sin\alpha + Ma\cos\alpha - fMg\cos\alpha + fMa\sin\alpha,$$

po dosazení za m a po úpravě

$$f = \frac{a}{g}. \tag{1}$$

Číselně je $f = 0{,}31$.

Pro $a \geq \dfrac{g}{\operatorname{tg}\alpha}$ těleso B již nepůsobí na klín. Pak platí:

$$M\sqrt{a^2+g^2} = mg + fma = Mg\sin\alpha + fMa\sin\alpha.$$

Po úpravě

$$f = \frac{\sqrt{a^2+g^2} - g\sin\alpha}{a\sin\alpha}. \tag{2}$$

Dosazením zjistíme, že pro $a = \dfrac{g}{\operatorname{tg}\alpha}$ jsou výrazy (1) a (2) totožné.

5 bodů

2. Označme $2V$ objem válce bez pístu, hmotnost pístu m a látkové množství plynu $2n$. Pak podle stavové rovnice před uvolněním pístu:

$$pV = nRT. \tag{1}$$

Po uvolnění pístu bude platit:

$$(p + \Delta p_1)(V - Sh) = nR(T + \Delta T), \tag{2}$$

$$(p - \Delta p_2)(V + Sh) = nR(T + \Delta T). \tag{3}$$

Protože se píst nachází opět v rovnováze, platí:

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta p = \frac{mg}{S}. \tag{4}$$

Píst poklesl do hloubky h, jeho potenciální energie tíhová se zmenšila, musí se tedy zvětšit vnitřní energie plynu:

$$mgh = \frac{5}{2}2nR\Delta T, \text{ z toho plyne } h = \frac{5nR\Delta T}{mg}. \tag{5}$$

5 bodů

Musíme vyřešit soustavu 5 rovnic o 5 neznámých. Z rovnice (1) vyjádříme objem V, z rovnice (4) obsah plochy S, z rovnice (5) vyjádříme h a dosadíme do rovnic (2) a (3):

$$(p + \Delta p_1)\left(\frac{T}{p} - \frac{5\Delta T}{\Delta p}\right) = T + \Delta T,$$

$$(p - \Delta p_2)\left(\frac{T}{p} + \frac{5\Delta T}{\Delta p}\right) = T + \Delta T.$$

Vyjádřením Δp_1 a Δp_2 a jejich sečtením

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = (T + \Delta T)\left(\frac{1}{\dfrac{T}{p} - \dfrac{5\Delta T}{\Delta p}} - \frac{1}{\dfrac{T}{p} + \dfrac{5\Delta T}{\Delta p}}\right) =$$

$$= \frac{(T + \Delta T)10p^2\Delta p\Delta T}{T^2(\Delta p)^2 - 25p^2(\Delta T)^2} = \Delta p.$$

Dostáváme kvadratickou rovnici $35p^2(\Delta T)^2 + 10p^2 T\Delta T - (\Delta p)^2 T^2 = 0$ s kořeny

$$\Delta T = -\frac{T}{7} \pm T\sqrt{\frac{100}{70^2} + \frac{140}{70^2}\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} = -\frac{T}{7} \pm T\sqrt{\frac{1}{49} + \frac{1}{35}\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2}.$$

Číselně vyhovuje kladný kořen $\Delta T = 0{,}3\ \mathrm{K}$, tedy teplota vzrostla o 0,3 °C, neboť celkově se vnitřní energie plynu zvětšila na úkor potenciální energie pístu.

5 bodů

3. a) V pásu mezi vodiči má při nesouhlasných směrech proudů magnetická indukce souhlasný směr, velikosti magnetické indukce sečteme. Platí:

$$B_0 = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{0{,}5d} + \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{kI}{0{,}5d} = 2(k+1) \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}.$$

Pro dané hodnoty k dostaneme $B_0(1) = 4 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}$, $B_0(2{,}25) = 6{,}5 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}$.

2 body

b) Mezi vodiči, kde má magnetická indukce obou magnetických polí shodný směr kolmý k nákresně, je velikost magnetické indukce dána vztahem

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{x} + \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{kI}{d-x} = \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{k}{d-x}\right), \tag{1}$$

kde $0 < x < d$. Označme $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{k}{d-x}$. Derivací dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{k}{(d-x)^2}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne $\frac{1}{x^2} = \frac{k}{(d-x)^2}$.

Vzhledem k podmínce $0 < x < d$ je rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$d - x = \sqrt{k} \cdot x,$$

z níž plyne $x_1 = \frac{d}{\sqrt{k}+1}$. Dosazením do (1) a úpravami dostaneme

$$B_{\min} = \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{k}{d-x_1}\right) = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot (\sqrt{k}+1)^2.$$

Pro $k = 1$ je v místě $x_1 = 0{,}5d$ minimální velikost magnetické indukce

$$B_{\min} = 4 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}.$$

Pro $k = 2{,}25$ je v místě $x_1 = 0{,}4d$ minimální velikost magnetické indukce

$$B_{\min} = 6{,}25 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}.$$

5 bodů

c) Pro $k = 1$ neexistuje místo na ose, kde je indukce nulová, resp. pouze ve velké vzdálenosti se k nule blíží.

Pro $k > 1$ hledané místo leží vně vnitřního pásu určeného vodiči, kde má magnetická indukce navzájem opačný směr, a to v polorovině přiléhající k vodiči s menším proudem. V této oblasti, tj. pro $x < 0$, platí

$$\frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{-x} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{kI}{-x+d}.$$

Z rovnice plyne

$$x_2 = \frac{d}{1-k}.$$

Pro $k = 2{,}25$ je $x_2 = -0{,}8d$, tedy nulová indukce je ve vzdálenosti $0{,}8d$ vlevo od levého vodiče.

4. a) Reakce probíhá podle rovnice ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} + {}^{1}_{1}\mathrm{p} \;\rightarrow\; {}^{225}_{89}\mathrm{Ac} + 2\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

Energie reakce

$$E_{\mathrm{r1}} = \left[m\left({}^{226}_{88}\mathrm{Ra}\right) + m\left({}^{1}_{1}\mathrm{H}\right) - m\left({}^{225}_{89}\mathrm{Ac}\right) - 2m\left({}^{1}_{0}\mathrm{n}\right)\right]c^2 =$$
$$= (226{,}025\,410 + 1{,}007\,825 - 225{,}023\,221 - 2 \cdot 1{,}008\,665)m_{\mathrm{u}}c^2 =$$
$$= -1{,}09 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = -6{,}83\ \mathrm{MeV}.$$

Zde je nutné dosazovat hmotnost vodíku včetně elektronu, jinak je odpověď chybná. Níže je zapotřebí dosazovat pouze hmotnost protonu.

Kinetická energie protonů klasicky:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v^2 = 1{,}34 \cdot 10^{-12}\mathrm{J} = 8{,}36\ \mathrm{MeV}.$$

Kinetická energie protonů relativisticky:

$$E_{\mathrm{k}} = m_{\mathrm{p}}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = 1{,}36 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 8{,}47\ \mathrm{MeV}.$$

Výsledky se liší o 1,3 %. Na jiné formy energie se mění $\dfrac{E_{\mathrm{k}} - |E_{\mathrm{r1}}|}{E_{\mathrm{k}}} = 19\ \%$ kinetické energie protonů.

4 body

b) Počet částic, které potřebujeme získat, je

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{AT_{\mathrm{Ac}}}{\ln 2} = \frac{5 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 3\,600}{\ln 2} = 6{,}23 \cdot 10^{15}.$$

Doba ostřelování

$$t = \frac{Q}{0{,}012 \cdot I} = \frac{Ne}{0{,}012 \cdot I} = \frac{6{,}23 \cdot 10^{15} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{0{,}012 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\ \mathrm{s} \doteq 14\ \mathrm{min}.$$

3 body

c) Energie reakce při rozpadu polonia je

$$E_{\mathrm{r2}} = \left[m\left({}^{213}_{84}\mathrm{Po}\right) - m\left({}^{209}_{82}\mathrm{Pb}\right) - m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)\right]c^2 =$$
$$= (212{,}992\,857 - 208{,}981\,090 - 4{,}002\,603)m_{\mathrm{u}}c^2 =$$
$$= 1{,}37 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 8{,}55\ \mathrm{MeV}.$$

Zbytek energie odnáší jádro olova při zpětném rázu.

3 body