Řešení úloh 1. kola 57. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autor úloh: J. Thomas

1. Úlohu můžeme výhodně řešit ve vztažné soustavě (O', x', y', t), jejíž počátek se pohybuje spolu s drakem, osa x' je vodorovná a osa y' svislá (obr. R1). V této vztažné soustavě je rychlost chlapce $\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ a uzlík na niti obíhá okolo počátku po kružnici o poloměru l. V uvažovaném okamžiku se nit otáčí okolo počátku úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{u_1}{l+L} = \frac{u\sin\alpha - v\cos\alpha}{l+L},$$

kde u_1 je velikost složky rychlosti $\boldsymbol{u'}$ kolmé k niti. Velikost rychlosti uzlíku v čárkované soustavě je

$$w' = \omega l = \frac{l}{l+L}(u\sin\alpha - v\cos\alpha).$$

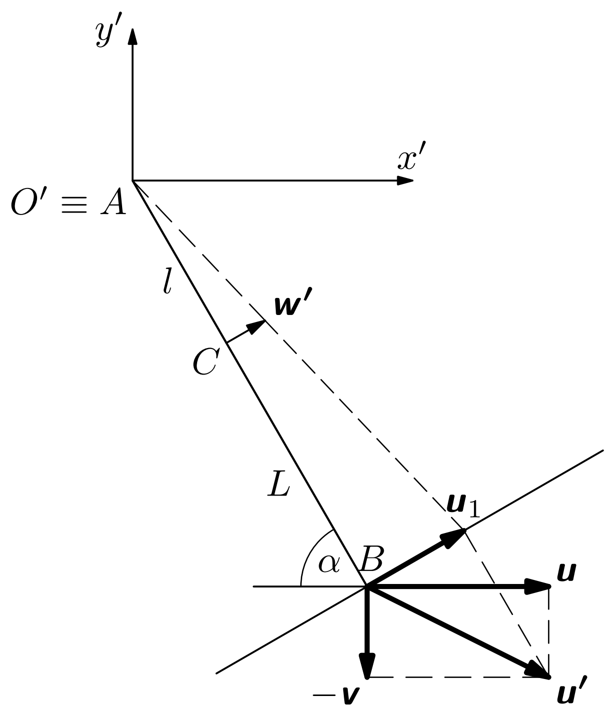
Ve vztažné soustavě spojené se zemí jsou souřadnice rychlosti uzlíku, její velikost a odchylka od vodorovné roviny

$$w_x = w'\sin\alpha, \quad w_y = w'\cos\alpha + v, \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}, \quad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{w_y}{w_x}.$$

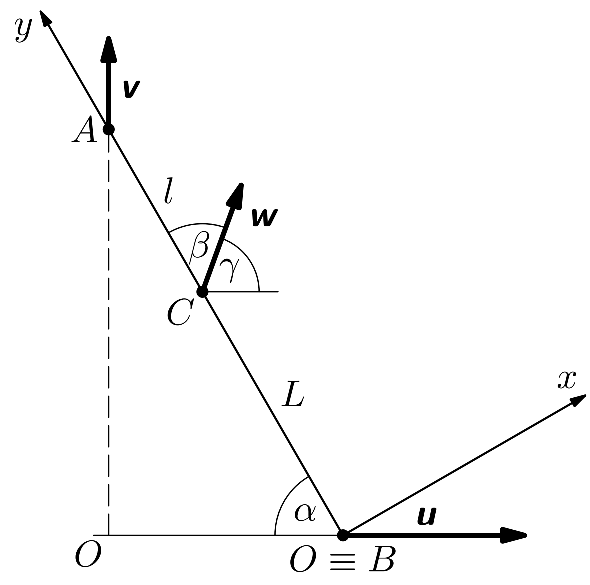
$$w' = \frac{l}{l+L}\,(u\sin\alpha - v\cos\alpha)$$

$$w_x = w'\sin\alpha = \frac{l\sin\alpha}{l+L}\,(u\sin\alpha - v\cos\alpha)$$

$$w_y = w'\cos\alpha + v = \frac{l\cos\alpha}{l+L}\,(u\sin\alpha - v\cos\alpha) + v$$



Obr. R1



Obr. R2

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{l \sin\alpha}{l+L}(u \sin\alpha - v\cos\alpha)\right]^2 + \left[\frac{l\cos\alpha}{l+L}(u\sin\alpha - v\cos\alpha) + v\right]^2} = 1{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\frac{l\cos\alpha}{l+L}(u\sin\alpha - v\cos\alpha) + v}{\frac{l\sin\alpha}{l+L}(u\sin\alpha - v\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{l\cos\alpha(u\sin\alpha - v\cos\alpha) + v(l+L)}{l\sin\alpha(u\sin\alpha - v\cos\alpha)} = 71^\circ$$

Alternativní řešení s použitím principu superpozice

Rychlost uzlíku můžeme určit jako vektorový součet rychlosti, kterou by měl, kdyby se drak nepohyboval a chlapec běžel rychlostí $\boldsymbol{u}$, a rychlosti, kterou by měl, kdyby drak stoupal rychlostí $\boldsymbol{v}$ a chlapec stál na místě. V obou případech předpokládáme, že se nit odvíjí z cívky. Pro vyšetření obou případů zvolíme vztažnou soustavu podle obr. R2.

V prvním případě by se nit otáčela úhlovou rychlostí $\omega_1 = \dfrac{u\sin\alpha}{l+L}$ a souřadnice rychlosti uzlíku by byly

$$w_{xu} = l\omega_1 = \frac{l}{l+L}u\sin\alpha, \quad w_{yu} = 0.$$

V druhém případě by se nit otáčela úhlovou rychlostí $\omega_2 = \dfrac{v\cos\alpha}{l+L}$ a souřadnice rychlosti uzlíku by byly

$$w_{xv} = L\omega_2 = \frac{L}{l+L}v\cos\alpha, \quad w_{yv} = v\sin\alpha.$$

Superpozicí dostaneme

$$w_x = w_{xv} + w_{xu} = \frac{vL\cos\alpha + ul\sin\alpha}{l+L}, \quad w_y = w_{yv} = v\sin\alpha.$$

Pro velikost výsledné rychlosti pak platí $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$. Odchylka rychlosti $\boldsymbol{w}$ od kladné poloosy y je $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{w_x}{w_y}$ a od vodorovné roviny $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\left(\frac{vL\cos\alpha + ul\sin\alpha}{l+L}\right)^2 + (v\sin\alpha)^2} = 1{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{w_x}{w_y} = \operatorname{arctg}\frac{vL\cos\alpha + ul\sin\alpha}{v(l+L)\sin\alpha}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \operatorname{arctg}\frac{vL\cos\alpha + ul\sin\alpha}{v(l+L)\sin\alpha} = 71^\circ$$

Bodové hodnocení: teoretické řešení **7 bodů**, numerický výpočet **3 body**.

2.a) Ke zjištění ΔU vyšetříme případ, kdy střela má rychlost rovnou právě v_0. (Změna ΔU bude stejná ve všech případech, kdy střela deskou proletí – práce vykonaná střelou je stejná – ale pro výpočet je výhodné využít případ, kdy střela a vozík budou mít po průstřelu stejnou rychlost). V takovém případě má střela při opouštění desky stejnou rychlost jako deska s vozíkem. Proběhl tak dokonale nepružný ráz, kdy obě tělesa zůstávají u sebe a pohybují se společně rychlostí o neznámé velikosti u. Druhou neznámou zůstává přírůstek vnitřní energie ΔU. Pak:

$$mv_0 = (m+M)u, \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2 + \Delta U,$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2v_0^2}{(m+M)^2} = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1-\frac{m}{m+M}\right) = \frac{mMv_0^2}{2(m+M)}. \qquad (1)$$

Číselně: $\Delta U \doteq 220$ J.

4 body

b) Při průletu střely o rychlosti $v > v_0$ deskou platí zákon zachování hybnosti:

$$mv = mv_1 + Mu, \qquad (2)$$

kde v_1 je rychlost střely po průniku deskou a u rychlost vozíku s deskou. Platí také zákon zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mu^2 + \Delta U. \qquad (3)$$

Z rovnice (2) vyjádříme $v_1 = \dfrac{mv - Mu}{m}$ a dosadíme do rovnice (3). Po úpravě dostaneme:

$$mv^2 = m\left(v - \frac{M}{m}u\right)^2 + Mu^2 + 2\Delta U = mv^2 - 2Mvu + \frac{M^2}{m}u^2 + Mu^2 + 2\Delta U.$$

Po dosazení za ΔU z (1) a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$\left(1+\frac{M}{m}\right)u^2 - 2vu + \frac{mv_0^2}{m+M} = 0 \quad \text{s kořeny} \quad u = \frac{m}{m+M}\left(v \pm \sqrt{v^2 - v_0^2}\right).$$

2 body

Čím větší je počáteční rychlost, tím kratší je doba působení stejné síly na dřevo a tím menší je impuls. Vozík tak převezme menší hybnost a bude se pohybovat pomaleji. Konečná rychlost vozíku tedy klesá s rostoucí počáteční rychlostí střely, proto úloze vyhovuje menší kořen

$$u = \frac{m}{m+M}\left(v - \sqrt{v^2 - v_0^2}\right).$$

Číselně pro rychlost střely $v = 250\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dostaneme $u \doteq 1{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2 body

c) Z této úvahy též plyne, že vozík získá největší rychlost při nejmenší rychlosti střely, tj. pro $v = v_0$. Proto platí

$$u_{\max} = \frac{mv_0}{m+M} = 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

3.a) Na počátku je tlak v obou částech válce

$$p_0 = \frac{n_1RT_1}{V_1} = \frac{n_2RT_2}{V_2},\ \text{proto}\ \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2V_1}{T_1V_2} = 1{,}46.$$

2 body

b) Na počátku v každé části nádoby platí pro příslušný plyn stavová rovnice

$$p_0V_1 = n_1RT_1, \quad p_0V_2 = n_2RT_2.$$

Jejich sečtením dostaneme

$$p_0(V_1+V_2) = R(n_1T_1+n_2T_2).$$

Po vyrovnání teplot popisuje soubor obou plynů s celkovým látkovým množstvím n_1+n_2 při stejné teplotě T a stejném tlaku p stavová rovnice $p(V_1+V_2) = (n_1+n_2)RT$. Dělením rovnic pro celý soubor plynů dostaneme

$$\frac{p}{p_0} = \frac{(n_1+n_2)T}{n_1T_1+n_2T_2} = \frac{T_2V_1+T_1V_2}{T_1T_2(V_1+V_2)}T.$$

4 body

Výslednou teplotu T určíme ze zákona zachování energie, neboť celková vnitřní energie soustavy obou ideálních plynů se během děje nezměnila (plyny si vyměnily teplo pouze mezi sebou a též práce vykonaná jedním plynem při rozpínání je rovna práci přijaté druhým plynem při stlačení). Pro vnitřní energii souboru plynů na počátku a na konci děje platí:

$$C_{V1}T_1 + C_{V2}T_2 = (C_{V1}+C_{V2})T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{C_{V1}T_1+C_{V2}T_2}{C_{V1}+C_{V2}} = 291\ \mathrm{K}.$$

Pak $\dfrac{p}{p_0} = \dfrac{T_2V_1+T_1V_2}{T_1T_2(V_1+V_2)} \cdot \dfrac{C_{V1}T_1+C_{V2}T_2}{C_{V1}+C_{V2}} = 0{,}88.$

4 body

4. Vzhledem k tomu, že počáteční hodnota proudu cívkou je nulová, budou časové průběhy proudu cívkou a napětí na cívce popisovat vztahy

$$i = I_\mathrm{m}\sin\omega t, \qquad u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\omega I_\mathrm{m}\cos\omega t = U_\mathrm{m}\cos\omega t. \tag{1}$$

Amplituda napětí na cívce $U_\mathrm{m} = L\omega I_\mathrm{m}$ je rovna jeho počáteční hodnotě. Platí

$$\omega = \frac{U_\mathrm{m}}{LI_\mathrm{m}}. \tag{2}$$

Pro napětí před připojením cívky platí

$$U_{BD} = U_{AE} = \frac{U}{3}, \quad U_{BA} = U_{DE} = \frac{2U}{3}, \quad U_{DA} = \frac{U}{3}.$$

4 body

Řešení úlohy užitím zákona zachování energie

a) Kapacita soustavy kondenzátorů před připojením cívky $C_1 = \frac{4}{3}C$. K nabití kondenzátorů musel zdroj dodat náboj $Q_1 = \frac{4}{3}CU$. Energie této soustavy $E_1 = \frac{2}{3}CU^2$. V okamžiku, kdy bude cívkou připojenou mezi body A a D procházet maximální proud, bude její napětí nulové a energie jejího magnetického pole $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI_\mathrm{m}^2$. Body A a D, k nimž je připojena, budou mít stejný potenciál. Na všech kondenzátorech bude stejné napětí $U/2$ a celková energie kondenzátorů bude

$$E_2 = 2\left(\frac{1}{2}C\frac{U^2}{4} + \frac{1}{2}2C\frac{U^2}{4}\right) = \frac{3}{4}CU^2.$$

Náboj dodaný zdrojem se musí zvětšit na $Q_2 = 2C\frac{U}{2} + C\frac{U}{2} = \frac{3}{2}CU$

a zdroj musí vykonat práci $W_\mathrm{z} = U(Q_2 - Q_1) = \frac{1}{6}CU^2$.

Podle zákona zachování energie musí platit

$$\frac{1}{2}LI_\mathrm{m}^2 = W_\mathrm{z} - (E_2 - E_1) = \frac{1}{6}CU^2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)CU^2 = \frac{1}{12}CU^2.$$

Z toho $I_\mathrm{m} = U\sqrt{\frac{C}{6L}}$.

Amplituda napětí na cívce je rovna počáteční hodnotě: $U_\mathrm{m} = \frac{U}{3}$.

Z (2) dostaneme $\omega = \dfrac{\frac{U}{3}}{LU\sqrt{\frac{C}{6L}}} = \sqrt{\dfrac{2}{3LC}}$.

b) Připojíme-li cívku mezi body A a B, nedojde ve větvi EDB k žádné změně. V okamžiku, kdy bude cívkou procházet největší proud, bude napětí na kondenzátoru mezi body A a B nulové a na kondenzátoru mezi body A a E bude napětí U. Celková energie kondenzátorů bude

$$E_3 = \frac{1}{2}2C\frac{U^2}{9} + \frac{1}{2}C\frac{4U^2}{9} + \frac{1}{2}2CU^2 = \frac{4}{3}CU^2.$$

Náboj dodaný zdrojem se zvětší na $Q_3 = \frac{2}{3}CU + 2CU = \frac{8}{3}CU$

a zdroj musí vykonat práci $W_\mathrm{z} = U(Q_3 - Q_1) = \frac{4}{3}CU^2$.

Podle zákona zachování energie musí platit

$$\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2 = W_{\mathrm{z}} - (E_3 - E_1) = \frac{4}{3}CU^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)CU^2 = \frac{2}{3}CU^2.$$

Z toho $I_{\mathrm{m}} = 2U\sqrt{\frac{C}{3L}}$.

Amplituda napětí na cívce je rovna počáteční hodnotě: $U_{\mathrm{m}} = \frac{2}{3}U$.

Z (2) dostaneme $\omega = \dfrac{\frac{2U}{3}}{2LU\sqrt{\frac{C}{3L}}} = \sqrt{\dfrac{1}{3LC}}$.

3 body

c) Připojíme-li cívku mezi body A a E, nedojde opět ve větvi EDB k žádné změně. V okamžiku, kdy bude cívkou procházet největší proud, bude napětí na kondenzátoru mezi body A a E nulové napětí a na kondenzátoru mezi body A a B bude napětí U. Celková energie kondenzátorů bude

$$E_4 = \frac{1}{2}2C\frac{U^2}{9} + \frac{1}{2}C\frac{4U^2}{9} + \frac{1}{2}CU^2 = \frac{5}{6}CU^2.$$

Náboj dodaný zdrojem se zvětší na $Q_4 = \frac{2}{3}CU + CU = \frac{5}{3}CU$

a zdroj musí vykonat práci $W_{\mathrm{z}} = U(Q_4 - Q_1) = \frac{1}{3}CU^2$.

Podle zákona zachování energie musí platit

$$\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2 = W_{\mathrm{z}} - (E_4 - E_1) = \frac{1}{3}CU^2 - \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)CU^2 = \frac{1}{6}CU^2.$$

Z toho $I_{\mathrm{m}} = U\sqrt{\frac{C}{3L}}$.

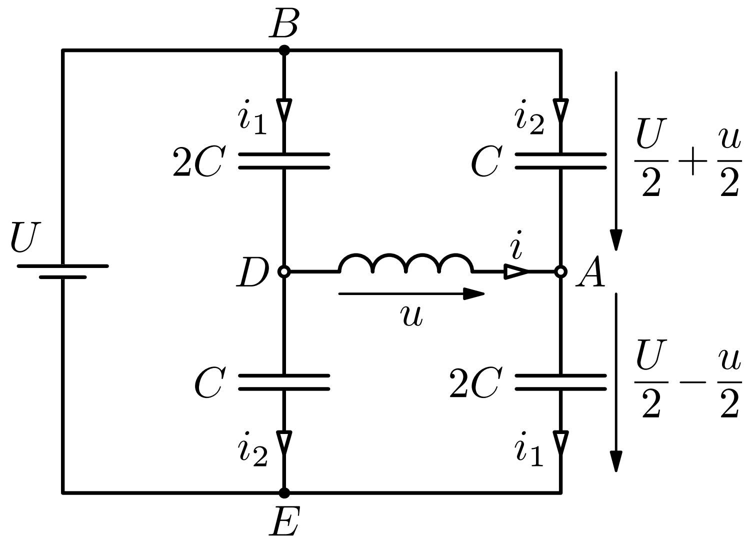
Amplituda napětí na cívce je rovna počáteční hodnotě: $U_{\mathrm{m}} = \frac{U}{3}$.

Z (2) dostaneme $\omega = \dfrac{\frac{U}{3}}{LU\sqrt{\frac{C}{3L}}} = \sqrt{\dfrac{1}{3LC}}$.

3 body

Řešení úlohy vyšetřením průběhu děje

a) Vzhledem k symetrii obvodu bude napětí středu cívky oproti bodu E trvale $U/2$ a proudy procházející kondenzátory se stejnou kapacitou budou stejné. To nám umožňuje označit obvodové veličiny podle obr. R3.



Obr. R3

V čase $t = 0$ je $i = 0$, $u = U/3$. Během děje platí

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \qquad i_2 = i_1 - i,$$

$$i_1\mathrm{d}t = 2C \cdot \mathrm{d}\left(\frac{U}{2} - \frac{u}{2}\right) = -C\mathrm{d}u, \quad (i_1 - i)\mathrm{d}t = C \cdot \mathrm{d}\left(\frac{U}{2} + \frac{u}{2}\right) = \frac{C}{2}\mathrm{d}u.$$

Z toho

$$i\mathrm{d}t = i_1\mathrm{d}t - \frac{C}{2}\mathrm{d}u = -\frac{3}{2}C\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{3}{2}C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2}LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2}{3LC}i.$$

Dostali jsme rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3LC}}.$$

Vzhledem k počátečním podmínkám budou kmity popsány rovnicemi

$$i = I_\mathrm{m}\sin\omega t, \qquad u = L\omega I_\mathrm{m}\cos\omega t = \frac{U}{3}\cos\omega t.$$

Z toho

$$I_\mathrm{m} = \frac{U}{3L\omega} = U\sqrt{\frac{C}{6L}}.$$

b) Zapojíme-li cívku mezi body A a B, větev BDE se neuplatní a můžeme proto vyšetřovat obvod podle obr. R4. Ze vztahů

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad C\mathrm{d}u = (i_1 - i)\mathrm{d}t, \quad 2C \cdot \mathrm{d}(U - u) = -2C \cdot \mathrm{d}u = i_1\mathrm{d}t$$

odvodíme

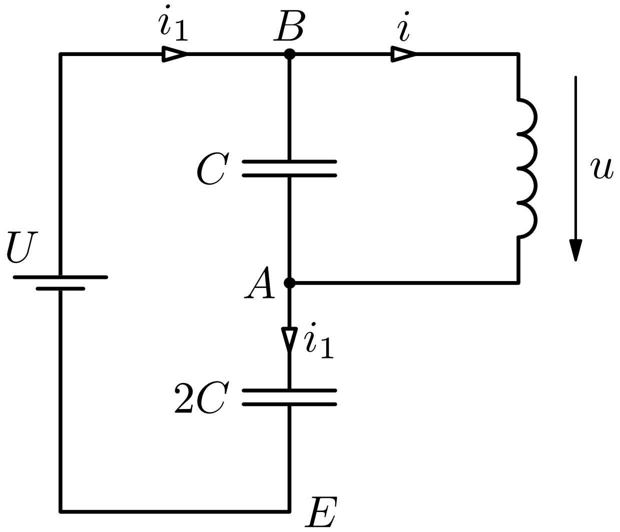
$$i = -3C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -3LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{3LC}i.$$

Dostali jsme rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{3LC}}$.
Počáteční podmínky v čase $t = 0$ jsou $i = 0$, $u = \dfrac{2}{3}U$. Kmity tedy budou popsány rovnicemi

$$i = I_\mathrm{m} \sin \omega t, \qquad u = L\omega I_\mathrm{m} \cos \omega t = \frac{2U}{3} \cos \omega t.$$

Z toho

$$I_\mathrm{m} = \frac{2U}{3L\omega} = 2U\sqrt{\frac{C}{3L}}.$$



Obr. R4

c) Zapojíme-li cívku mezi body A a B, větev BDE se neuplatní a můžeme proto vyšetřovat obvod podle obr. R5. Ze vztahů

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad 2C\mathrm{d}u = (i_1 - i)\mathrm{d}t, \quad C \cdot \mathrm{d}(U - u) = -C \cdot \mathrm{d}u = i_1\mathrm{d}t$$

odvodíme

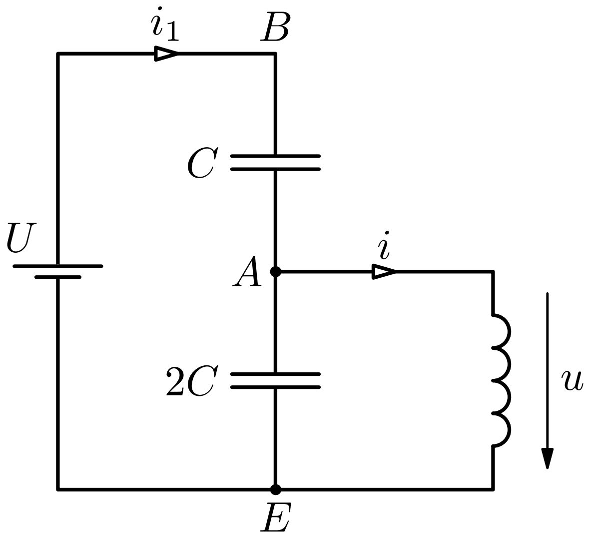
$$i = -3C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -3LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{3LC}i.$$

Dostali jsme opět rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{3LC}}$. Počáteční podmínky v čase $t = 0$ jsou ale $i = 0$, $u = \dfrac{U}{3}$.
Kmity tedy budou popsány rovnicemi

$$i = I_\mathrm{m} \sin \omega t, \qquad u = L\omega I_\mathrm{m} \cos \omega t = \frac{U}{3} \cos \omega t.$$

Z toho

$$I_\mathrm{m} = \frac{U}{3L\omega} = U\sqrt{\frac{C}{3L}}.$$



Obr. R5

Jak to bude řešit inženýr elektrotechnik

Při kmitech v obvodu se ideální zdroj stejnosměrného napětí neuplatní a můžeme jej nahradit zkratem. Obvod se v případě a) zjednoduší na paralelní spojení cívky a soustavy kondenzátorů o celkové kapacitě $3C/2$, v případech b) a c) dostaneme paralelní spojení cívky a dvou kondenzátorů o celkové kapacitě $3C$. Počáteční hodnota proudu cívkou je ve všech případech nulová, amplituda napětí je tedy rovna jeho počáteční hodnotě.

V případě a) bude obvod kmitat s frekvencí $\omega = \sqrt{\dfrac{2}{3CL}}$ a $U_{\max} = U/3$,

v případě b) bude kmitat s úhlovou frekvencí $\sqrt{\dfrac{1}{3CL}}$ a amplitudou napětí $2U/3$

a případě c) bude kmitat s úhlovou frekvencí $\sqrt{\dfrac{1}{3CL}}$ a amplitudou napětí $U/3$.

Amplitudu proudu určíme jako $I_{\mathrm{m}} = \dfrac{U_{\mathrm{m}}}{\omega L}$. Dostaneme hodnoty a) $U\sqrt{\dfrac{C}{6L}}$, b) $2U\sqrt{\dfrac{C}{3L}}$ a c) $U\sqrt{\dfrac{C}{3L}}$.

5.a) Paprsky se lámou na stěnách druhého hranolu, ze kterého vystupují pod úhlem γ (obr. R6). Platí

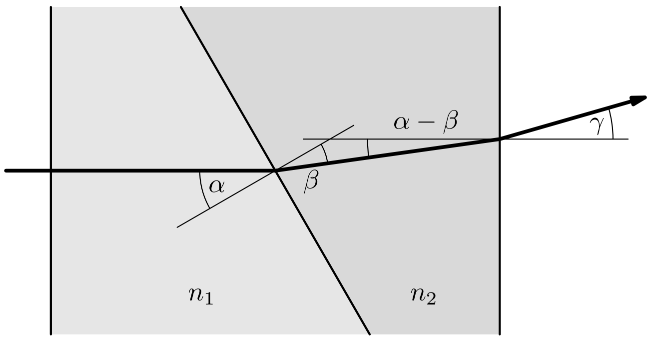
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\beta)} = n_2. \tag{1}$$

Po úpravě s dosazení dostaneme

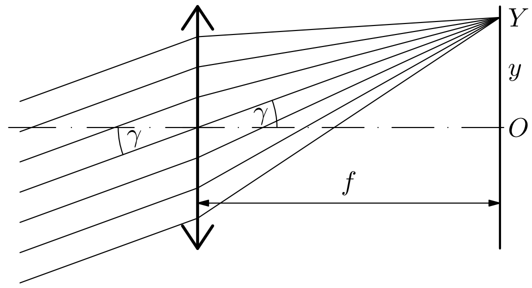
$$\beta = \arcsin\frac{n_1\sin\alpha}{n_2} = 4{,}4105°, \quad \gamma = \arcsin[n_2\sin(\alpha-\beta)] = 1{,}00215°.$$

Poloha bodu na stínítku v ohniskové rovině čočky, do kterého se sbíhají rovnoběžné paprsky odchýlené od optické osy o úhel γ, je určena paprskem, který jde středem čočky a neláme se. Z obr. R7 plyne

$$y = f\,\mathrm{tg}\,\gamma = 1{,}7493\ \mathrm{cm} \doteq 1{,}75\ \mathrm{cm}.$$



Obr. R6



Obr. R7

S použitím aproximace $\sin x \approx x$ přepíšeme vztahy (1) do tvaru

$$\frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{n_1}{n_2}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha-\beta} \approx n_2.$$

Z toho

$$\gamma \approx n_2(\alpha-\beta) \approx n_2\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)\alpha = (n_2-n_1)\alpha = 1^\circ,$$

$$y = f \operatorname{tg}\gamma \approx 1{,}7455 \text{ cm} \doteq 1{,}75 \text{ cm}.$$

Chyba při výpočtu s použitím aproximací ovlivnila až čtvrtou platnou číslici výsledku. Při zaokrouhlení na rozumný počet platných číslic je zanedbatelná.

4 body

Poznámka: Použitá aproximace sice platí jen pro velikost úhlu v radiánech, ale poměr velikostí úhlů v radiánech a ve stupních je stejný.

b) Odstraníme-li druhý hranol, paprsky se lámou jen při výstupu z prvního hranolu (obr. R8). Platí

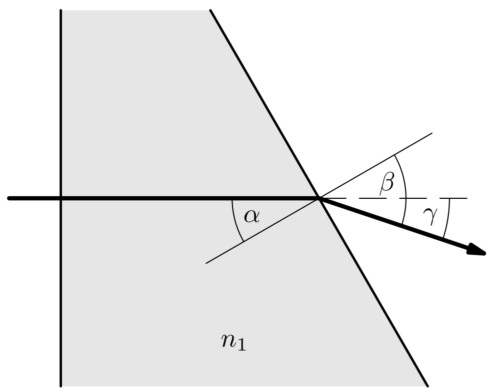
$$\sin\beta = n_1 \sin\alpha, \quad \gamma = \beta - \alpha \quad (2)$$

Po dosazení vychází

$$\beta = 7{,}5120^\circ, \quad \gamma = 2{,}5120^\circ,$$

$$y_1 = f \operatorname{tg}\gamma = 4{,}387 \text{ cm} \doteq 4{,}39 \text{ cm}.$$

Při použití aproximace přepíšeme vztahy (2) na $\beta \approx n_1\alpha, \quad \gamma = \beta - \alpha$ a po dosazení vyjde



Obr. R8

$$\beta = 7{,}5^\circ, \quad \gamma \approx 2{,}5^\circ, \quad y_1 = f \operatorname{tg}\gamma \approx 4{,}366 \text{ cm} \doteq 4{,}37 \text{ cm}.$$

Tentokrát chyba při použití aproximace ovlivnila už třetí platnou číslici a poněkud se projevila i při zaokrouhlení.

3 body

c) Ponecháme-li jen druhý hranol, lámou se paprsky na obou jeho stěnách (obr. R9). Platí

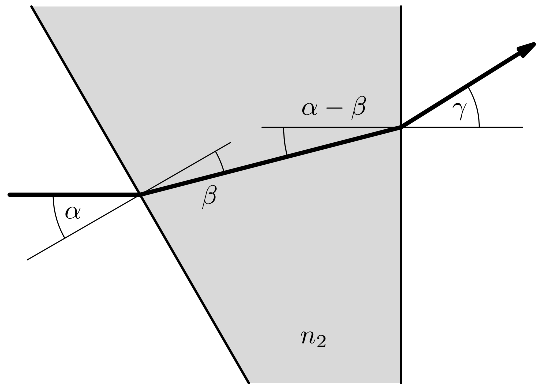
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n_2}, \quad \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\beta)} = n_2. \qquad (3)$$

Po úpravě a dosazení dostaneme

$$\beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n_2} = 2{,}9387°,$$

$$\gamma = \arcsin[n_2 \sin(\alpha-\beta)] = 3{,}5056°,$$

$$y_2 = f \operatorname{tg}\gamma = 6{,}126 \text{ cm} \doteq 6{,}13 \text{ cm}.$$



Obr. R9

Při použití aproximace přepíšeme vztahy (3) na

$$\beta \approx \frac{\alpha}{n_2}, \quad \gamma = n_2(\alpha-\beta) \approx (n_2-1)\alpha$$

a po dosazení vyjde

$$\gamma \approx 3{,}5°, \quad y_2 = f \operatorname{tg}\gamma \approx 6{,}116 \text{ cm} \doteq 6{,}12 \text{ cm}.$$

Také tentokrát chyba při použití aproximace ovlivnila třetí platnou číslici a poněkud se projevila i při zaokrouhlení.

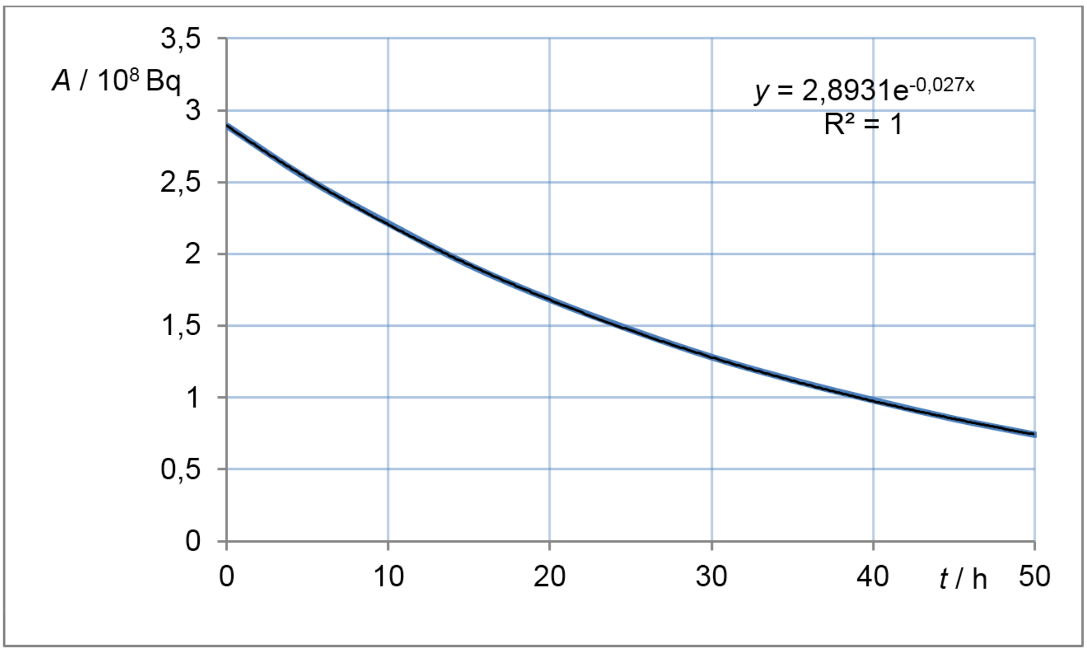
3 body

7.a) Rozpadová rovnice zní ${}^{227}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{231}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{0}_{0}\widetilde{\nu}$.

2 body

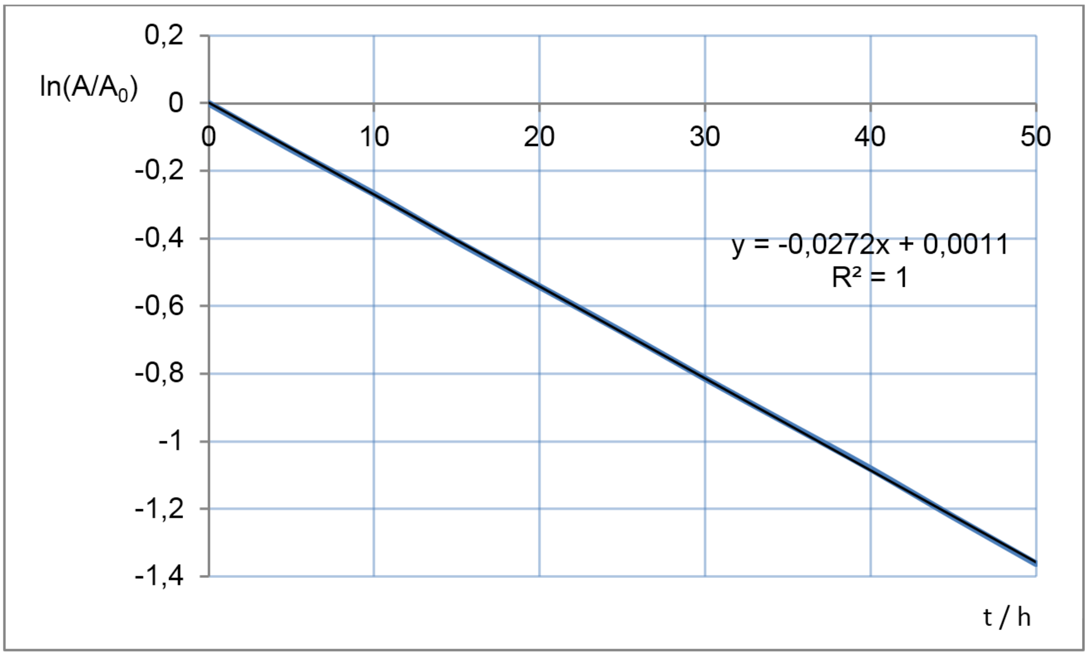
b) Z rovnice regrese exponenciální křivky (obr. R10) odečteme:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}027 \text{ h}^{-1} = 7{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T = 26 \text{ h}.$$



Obr. R10

Přesnější je využití logaritmické funkce. Ze zákona radioaktivní přeměny zlogaritmováním dostaneme: $\ln \frac{A}{A_0} = -\lambda t$. Sestrojíme graf závislosti $\ln \frac{A}{A_0}$ na čase:



Obr. R11

Z rovnice regrese odečteme:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}0272\ \mathrm{h}^{-1} = 7{,}56 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T = 25{,}5\ \mathrm{h}$$

.

4 body

c) Původní vzorek obsahoval $N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A_0 T}{\ln 2} = 3{,}8 \cdot 10^{13}$ atomů a jeho hmotnost byla $m = N_0 A_r m_\mathrm{u} = 3{,}8 \cdot 10^{13} \cdot 231 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}46 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{kg}$.

2 body

d) Aktivita vzorku po 30 dnech bude

$$A_{30} = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 2{,}89 \cdot 10^{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30\cdot 24}{25{,}5}}\ \mathrm{Bq} = 0{,}9\ \mathrm{Bq}.$$

2 body