Řešení úloh krajského kola 56. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autoři úloh: J. Jírů (1) a J. Thomas (2, 3, 4)

1. a) Molární hmotnost vzduchu je $M_\mathrm{m} = 29{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. Vzduch v láhvi má počáteční termodynamickou teplotu $T_1 = 369\,\mathrm{K}$. Ze stavové rovnice

$$p_1V_1 = \frac{m}{M_\mathrm{m}}RT_1$$

plyne

$$m = \frac{p_1V_1M_\mathrm{m}}{RT_1} \doteq 4{,}30\ \mathrm{g}.$$

3 body

b) Termodynamická teplota vody v bazénu je $T_2 = 298\ \mathrm{K}$. Vzduch v láhvi se izochoricky ochladí na tuto teplotu, jeho tlak klesne na hodnotu

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 = \frac{298}{369}p_1 \doteq 105\ \mathrm{kPa}.$$

2 body

c) Celkový tlak vody v místě ventilu je

$$p_3 = p_\mathrm{a} + h\rho g \doteq 117\ \mathrm{kPa}.$$

2 body

Jelikož $p_3 > p_2$, vnikne dovnitř láhve voda. Stlačený vzduch zaujme při nezměněné teplotě objem

$$V_3 = \frac{p_2}{p_3}V_1 \doteq 3{,}14\ \mathrm{dm^3}.$$

2 body

Voda tak zaplní objem $\Delta V = V_1 - V_3 \doteq 0{,}36\ \mathrm{dm^3}$.

1 bod

2. a) Zvolme soustavu souřadnic s počátkem v místě vrhu (obr. R1). Z rovnic

$$x = v_0 t\cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

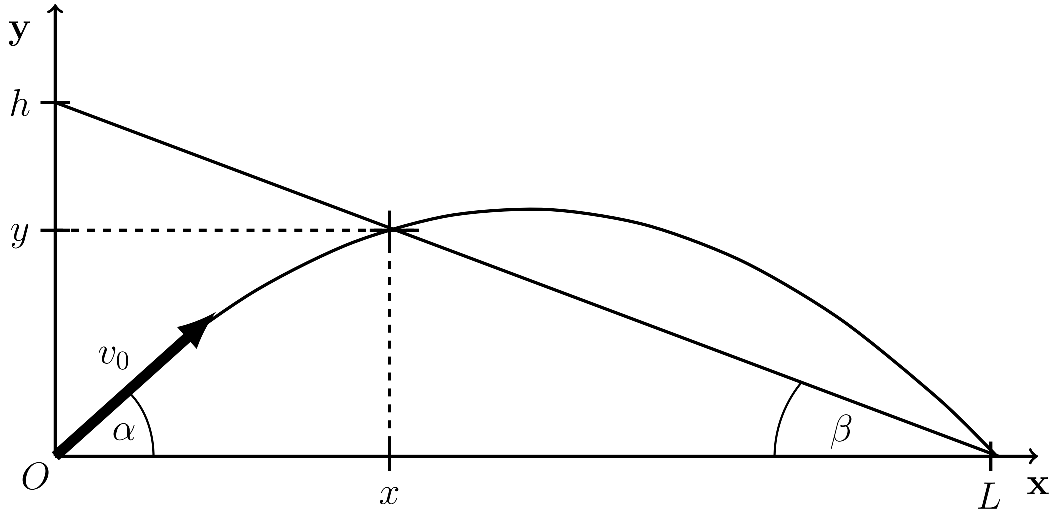
položením $x = L$, $y = 0$ dostaneme

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}} \doteq 11{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Kámen pak letí po dobu

$$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{L}{v_0\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2L\mathrm{tg}\alpha}{g}} \doteq 1{,}3\ \mathrm{s}.$$

4 body



Obr. R1

b) Označme β výškový úhel kamene, resp. jeho stínu, vzhledem k lampě (obr. R1). Výška stínu kamene nad místem odhodu závisí na čase. Dosazením souřadnic určených rovnicemi (1) a (2) a odvozeného vztahu

$$h\,(t) = L\mathrm{tg}\beta = L\frac{y}{L-x} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \frac{v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - v_0 t\cos\alpha} =$$

$$= v_0 t \sin\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha - gt}{2v_0 \sin\alpha - gt} = v_0 t \sin\alpha.$$

Výška stínu je přímo úměrná času, stín kamene se tedy pohybuje rovnoměrně rychlostí o velikosti

$$v_s = v_0 \sin\alpha = \sin\alpha \sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{gL\mathrm{tg}\alpha}{2}} \doteq 6{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

c) V rovnicích (1) a (2) šikmého vrhu položíme $x = L$, $y = d$. Po vyloučení času dostáváme vztah $d = L\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_{01}^2 \cos^2\alpha}$, ze kterého vyjádříme v_{01}:

$$v_{01} = \frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\,(L\mathrm{tg}\alpha - d)}} \doteq 12{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

3. a) Protože $v_1 = 3v_2$ bude místo setkání v $\frac{1}{4}$ vzdálenosti míst M a C, blíže k místu C. Chodec proto musí vyrazit směrem k místu C.
Motocyklista a cyklista se setkají za dobu $t = \frac{s}{v_1+v_2}$. Za tuto dobu musí chodec ujít vzdálenost $\frac{1}{3}s - \frac{1}{4}s = \frac{1}{12}s$ a musí tedy jít rychlostí

$$v = \frac{\frac{1}{12}s}{\frac{s}{v_1+v_2}} = \frac{v_1+v_2}{12} = \frac{1}{9}v_1 \doteq 6{,}7\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

4 body

b) Chodec a motocyklista se potkají ve vzdálenosti x od bodu M v čase t_1. Platí:

$$\frac{2}{3}s = (v_1 + v)\,t_1,\ v = \frac{1}{9}v_1 \text{ a také } x = v_1 t_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}s.$$

Cyklista dojede chodce ve vzdálenosti y od místa C v čase t_2. Platí:

$$y = v_2 t_2,\ v = \frac{1}{3}v_2 \text{ a také } y - \frac{s}{3} = v t_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{s}{2}.$$

4 body

c) Čas setkání kamarádů podle části a) je

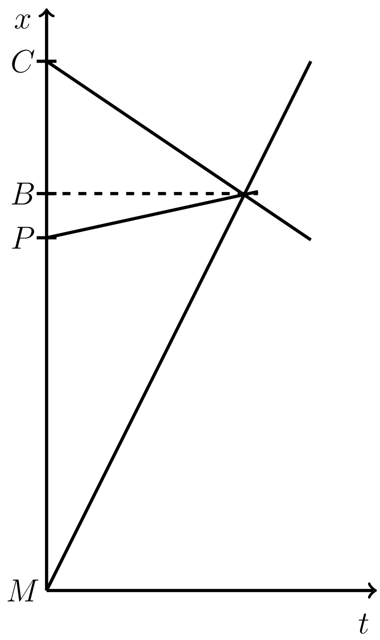
$$t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15 \text{ minut.}$$

Podobně pro část b)

$$t_1 = \frac{2s}{3\,(v_1 + v)} = \frac{1}{5}\ \text{h} = 12 \text{ minut,}$$
$$t_2 = \frac{s}{(2v_2)} = \frac{1}{2}\ \text{h} = 30 \text{ minut.}$$

2 body

Grafické řešení části a):



Platí: $|MP| : |CP| = 2 : 1$
$|MB| : |CB| = 3 : 1$

Odtud: $|MC| : |BC| = (|MB| + |BC|) : |BC| = 4 : 1$
$|MC| : |PC| = (|MC| + |PC|) : |PC| = 3 : 1$

Dělením rovnic: $|PC| : |BC| = 4 : 3$
Užitím tohoto vztahu:

$$\frac{|PB|}{|BC|} = \frac{|PC| - |BC|}{|BC|} = \frac{1}{3}$$

Rychlosti chodce a cyklisty jsou tedy v poměru 1 : 3, proto $v = \frac{v_2}{3} = 6{,}7\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

4. a) Vyjdeme z rovnosti vztlakové a tíhové síly:

$$27a^3\rho_\mathrm{v}g = 36a^3\rho g \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3}{4}\rho_\mathrm{v} = 750\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

2 body

b) Spodní a prostřední krychle budou nyní ponořeny do hloubky x a podle Archimédova zákona platí:

$$x \cdot 9a^2\rho_\mathrm{v} = 35a^3\rho = \frac{105}{4}a^3\rho_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{35}{12}a \doteq 2{,}92a.$$

Bude tedy částečně ponořena jen spodní krychle.

2 body

c) Horní a prostřední krychle se ponoří do hloubky y a podle Archimédova zákona platí:

$$y \cdot 4a^2\rho_\mathrm{v} = 9a^3\rho = \frac{27}{4}a^3\rho_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{27}{16}a \doteq 1{,}69a.$$

Bude tedy ponořena jen prostřední krychle.

2 body

d) Těžiště soustavy všech tří krychlí je od spodní stěny největší krychle ve vzdálenosti

$$y_\mathrm{T} = \frac{1{,}5a\cdot 27a^3 + 4a\cdot 8a^3 + 5{,}5a\cdot a^3}{36a^3} = \frac{39}{18}a \doteq 2{,}17a > \frac{3}{2}a = 1{,}5a.$$

Působiště vztlakové síly, které je v těžišti vodního tělesa, nahrazujícího potopenou část krychle, je pod těžištěm soustavy krychlí.
Těžiště soustavy spodní a prostřední krychle je od spodní stěny největší krychle ve vzdálenosti

$$y_\mathrm{T1} = \frac{1{,}5a\cdot 27a^3 + 4a\cdot 8a^3}{35a^3} = \frac{29}{14}a \doteq 2{,}07a > \frac{35}{24}a \doteq 1{,}46a,$$

Těžiště soustavy horní a prostřední krychle je od spodní stěny prostřední krychle ve vzdálenosti

$$y_\mathrm{T2} = \frac{a\cdot 8a^3 + 2{,}5a\cdot a^3}{9a^3} = \frac{21}{18}a \doteq 1{,}17a > \frac{27}{32}a \doteq 0{,}84a.$$

3 body

Ve všech případech leží těžiště soustavy nad působištěm vztlakové síly. O stabilitě soustavy rozhoduje poloha metacentra M – bodu, ve kterém protíná nositelka vztlakové síly při vychýlení soustavy o malý úhel osu soustavy. Při vychýlení soustavy hrozí též sklouznutí horní krychle.

1 bod