

Řešení úloh 1. kola 56. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

Autoři úloh: J. Jirů (1, 3, 5, 7), J. Thomas (2, 4), P. Šedivý (6)

1. Kulička o hmotnosti m valí se bez prokluzování rychlostí o velikosti v má kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2.$$

Na kuličku během pohybu působí tíhová síla a reakce žlábků. Dostředivá síla, která působí na kuličku při pohybu po kruhové části žlábků, je výslednicí reakce žlábků a normálové složky tíhové síly. Dostane-li se kulička až do bodu $A[0; 2R]$, splňuje dostředivá síla působící na kuličku v bodě A podmínku

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \quad \Rightarrow \quad v \geq \sqrt{Rg}.$$

Rovnost nastane pro rychlost o velikosti v_1 , které odpovídá minimální výška h_{\min} , z níž kuličku uvolníme. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mgh_{\min} = mg \cdot 2R + \frac{7}{10}mv_1^2 = 2mgR + \frac{7}{10}mgR.$$

Z toho

$$h_{\min} = 2,7R. \quad (1)$$

3 body

- a) V případě $h_1 = 3R$ se kulička do bodu A dostane a následuje vodorovný vrh s počáteční rychlostí v_{01} . Ze zákona zachování mechanické energie

$$mg \cdot 3R = mg \cdot 2R + \frac{7}{10}mv_{01}^2$$

pak dostaneme $v_{01} = \sqrt{\frac{10}{7}gR}$. Trajektorie vodorovného vrhu splňuje rovnice

$$x = v_{01}t = \sqrt{\frac{10}{7}Rg} \cdot t, \quad y = 2R - \frac{1}{2}gt^2.$$

Položením $y = 0$ a vyloučením času ze soustavy dostaneme

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{10}{7}}R = 2,39R.$$

3 body

- b) Ze vztahu (1) plyne, že při počáteční výšce $h = 2,36R$ kulička do bodu A nedospěje a odpoutá se od konstrukce dřívě. Označme B bod posledního kontaktu kuličky s konstrukcí, v_{02} velikost okamžité rychlosti kuličky

v tomto bodě (obr. R1). V bodě B je reakce žlábků nulová, proto nastává rovnost mezi velikostmi dostředivé síly a normálové složky tíhové síly:

$$\frac{mv_{02}^2}{R} = mg \sin \beta,$$

z čehož

$$\sin \beta = \frac{v_{02}^2}{gR}. \quad (2)$$

Rychlost v_{02} kuličky v bodě B určíme ze ZZME. Platí

$$mg \cdot 2,36R = mg \cdot R(1 + \sin \beta) + \frac{7}{10}mv_{02}^2.$$

Po dosažení vztahu (2) dostaneme

$$v_{02} = \sqrt{0,8gR}. \quad (3)$$

Po dosažení bodu B kulička koná šikmý vrh s elevačním úhlem $90^\circ - \beta$. Souřadnice bodu B jsou

$$x_B = -R \cos \beta, \quad y_B = R(1 + \sin \beta).$$

Trajektorie šikmého vrhu splňuje rovnice

$$x = -R \cos \beta + v_{02}t \sin \beta,$$

$$y = R(1 + \sin \beta) + v_{02}t \cos \beta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Z rovnic (2) a (3) pro hodnoty goniometrických funkcí úhlu β plyne

$$\sin \beta = \frac{v_{02}^2}{gR} = 0,8,$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 0,6.$$

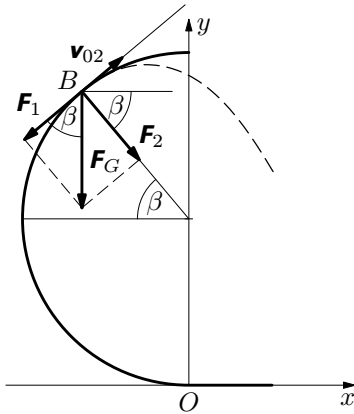
Po jejich dosažení rovnice šikmého vrhu mají tvar

$$x = -0,6R + 0,8\sqrt{0,8gR} \cdot t, \quad (4)$$

$$y = 1,8R + 0,6\sqrt{0,8gR} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5)$$

Položením $y = 0$ v rovnici (5) dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou t :

$$\frac{1}{2}gt^2 - 0,6\sqrt{0,8gR} \cdot t - 1,8R = 0.$$



Obr. R1

Fyzikální význam kladný kořen

$$t_1 = \frac{0,6\sqrt{0,8gR} + \sqrt{0,36 \cdot 0,8gR + 3,6gR}}{g} = 2,508\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Jeho dosazením do rovnice (4) dostaneme souřadnici místa dopadu $x_2 = 1,19R$.

4 body

2.a) Z rovnice

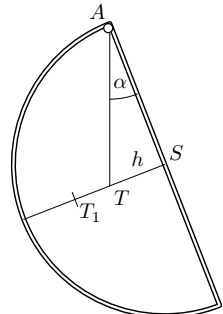
$$(2R + \pi R)h = \pi R|T_1 S|,$$

kde dle zadání $|T_1 S| = \frac{2R}{\pi}$, plyne

$$h = \frac{2}{\pi + 2}R.$$

2 body

b) Těžiště smyčky zavěšené pouze na hřebíku A se bude nacházet pod tímto hřebíkem (obr. R2). Z toho



Obr.R2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{\pi + 2} = 0,389 \Rightarrow \alpha = 21,3^\circ.$$

2 body

c) Na smyčku působí tři síly; v bodě A reakce hřebíku \mathbf{N} , jejíž složky do vodorovného a svislého směru označíme \mathbf{N}_x a \mathbf{N}_y , v bodě B reakce hřebíku \mathbf{F} , která má směr do středu oblouku a tíhová síla, která působí v těžišti T ležícím na ose smyčky ve vzdálenosti h od středu oblouku (obr. R3). Z rovnováhy momentů vzhledem k bodu A plyne

$$FR \sin \beta = mg \left(R - \frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \right) \sin \beta = mg \left(R - \frac{2R}{\frac{\pi + 2}{\operatorname{tg} \beta}} \right) \sin \beta.$$

Protože $\beta = 60^\circ$, $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$, dostáváme

$$F = mg \left(1 - \frac{2}{(\pi + 2)\sqrt{3}} \right) = 3,80 \text{ N.}$$

Z rovnováhy sil plyne pro souřadnice síly \mathbf{N}

$$N_x = -F \sin \beta = -3,29 \text{ N}, \quad N_y = mg - F \cos \beta = 3,00 \text{ N.}$$

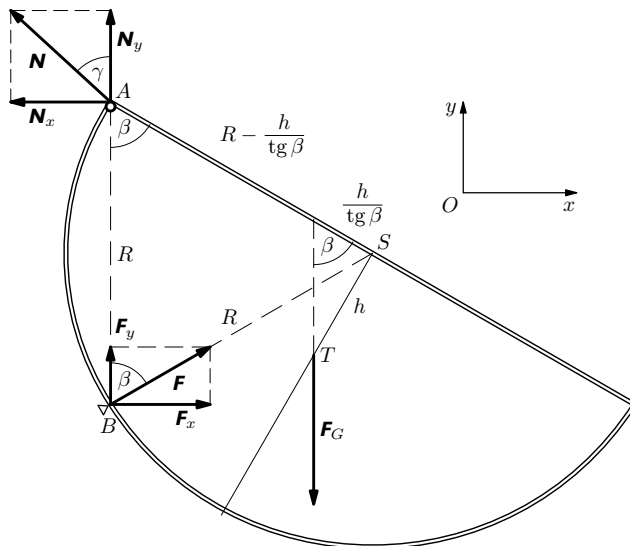
Reakce v bodě A má velikost

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = 4,46 \text{ N}$$

a se svislým směrem svírá úhel γ , pro který platí

$$\text{tg } \gamma = \frac{|N_x|}{N_y} = 1,097, \quad \gamma = 47,6^\circ.$$

6 bodů



Obr. R3

- 3.a) Během pádu články řetězu na sebe vzájemně nepůsobí, každý je urychlován tíhovým polem Země a pohybuje se volným pádem. Označíme-li t_1 čas dopadu dolního konce a t_2 čas dopadu horního konce řetězu, platí

$$h - l = \frac{1}{2}gt_1^2, \quad h = \frac{1}{2}gt_2^2.$$

Z rovnic pro hledanou dobu plyne

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2(h-l)}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h-l}).$$

Číselně vychází 0,65 s pro $h_1 = 10,0$ m a 0,39 s pro $h_2 = 20,0$ m.

2 body

- b) Označme y souřadnici horního konce řetězu během pádu. Podle ZZME pro

$y \geq l$ je kinetická energie padajícího řetězu

$$E_{k1} = mg(h - y).$$

V další fázi pro $y \leq l$ má řetěz kinetickou energii

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \frac{y}{l} mv^2.$$

kde $v = \sqrt{2g(h - y)}$ je rychlost každého dosud se pohybujícího článku. Po dosažení dostaneme

$$E_{k2} = \frac{mg}{l}(h - y)y.$$

Je to kvadratická funkce bez absolutního členu s nulovými body pro $y = 0$ a $y = h$, tedy pro vrchol jejího grafu platí $y = h/2$. Pro $h \leq 2l$ (což číselně splňuje h_1) nabývá kinetická energie maxima ve výšce $y = h/2$, a to

$$E_{k\max} = \frac{mgh^2}{4l} = 140 \text{ J}.$$

Pro $h \geq 2l$ (což číselně splňuje h_2) nabývá kinetická energie maxima ve výšce $y = l$, a to

$$E_{k\max} = mg(h - l) = 510 \text{ J}.$$

4 body

- c) Označme $s = h - y$ dráhu uraženou horním koncovým bodem řetězu. Pak podle b) je závislost kinetické energie na dráze dána rovnicemi

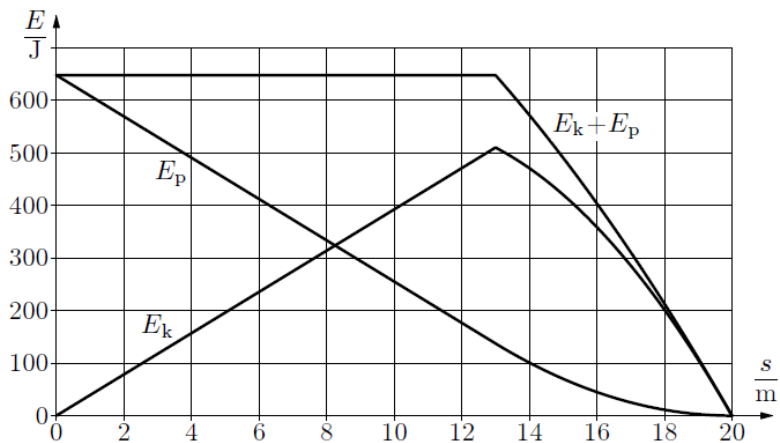
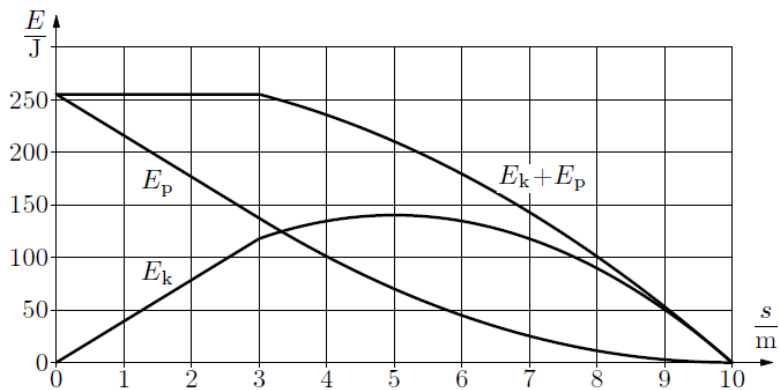
$$E_{k1} = mgs \quad \text{pro } s \leq h - l,$$
$$E_{k2} = \frac{mg}{l}(h - s)s = -\frac{mg}{l}s^2 + \frac{mgh}{l}s \quad \text{pro } s \geq h - l.$$

Závislost potenciální energie na dráze je dána rovnicemi

$$E_{p1} = mg \left(h - \frac{l}{2} - s \right) \quad \text{pro } s \leq h - l,$$
$$E_{p2} = \frac{y}{l} mg \frac{y}{2} = \frac{mg}{2l} y^2 = \frac{mg}{2l} (h - s)^2 \quad \text{pro } s \geq h - l.$$

Celková mechanická energie je

$$E_1 = E_{k1} + E_{p1} = mg \left(h - \frac{l}{2} \right) \quad \text{pro } s \leq h - l,$$
$$E_2 = E_{k2} + E_{p2} = \frac{mg}{2l} (h^2 - s^2) \quad \text{pro } s \geq h - l.$$



4 body

- 4.a) Jde o fyzické kyvadlo, jehož těžiště je ve vzdálenosti $L/3$ od osy otáčení. Při malé amplitudě pro jeho dobu kmitu pak platí

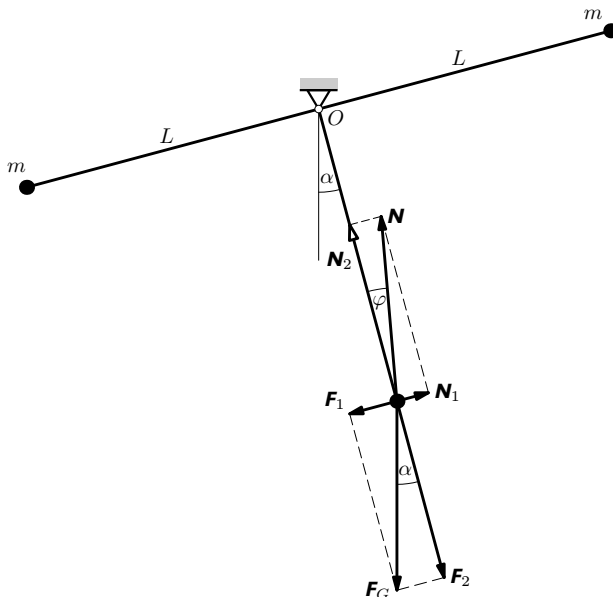
$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mL^2}{mgL}} = 1,6 \text{ s.}$$

3 body

- b) V krajní poloze je okamžitá úhlová rychlost kyvadla nulová. Výsledný moment sil působících na kyvadlo má velikost $M = F_G L \sin \alpha$ a kyvadlu uděluje úhlové zrychlení o velikosti

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{mgL \sin \alpha}{3mL^2} = \frac{g \sin \alpha}{3L}.$$

Síly působící v krajní poloze na spodní kuličku jsou vyznačeny na obr. R4.



Obr. R4

Je to tíhová síla \mathbf{F}_G s tečnou složkou \mathbf{F}_1 a normálovou složkou \mathbf{F}_2 a síla \mathbf{N} od tyčky s tečnou složkou \mathbf{N}_1 a normálovou složkou \mathbf{N}_2 . Kuličky mají v krajní poloze nulovou rychlost, tedy i nulové normálové zrychlení. Proto

$$N_2 = F_2 = mg \cos \alpha.$$

Tečné zrychlení zde má velikost $a_t = \varepsilon L = \frac{g \sin \alpha}{3}$. Proto

$$F_1 - N_1 = ma_t \quad \Rightarrow \quad N_1 = F_1 - ma_t = mg \sin \alpha - \frac{mg \sin \alpha}{3} = \frac{2mg \sin \alpha}{3}.$$

Síla, kterou na dolní kuličku působí tyčka, má velikost

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = mg \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} = 0,99mg = 0,97 \text{ N}$$

a je odchýlena od tyčky o úhel φ , pro který platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha, \quad \varphi = 6,7^\circ.$$

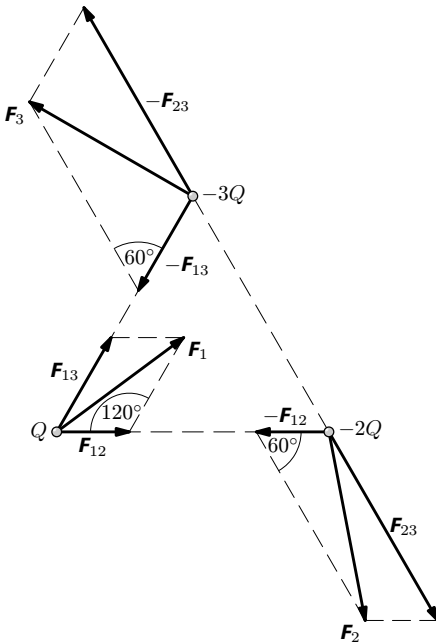
7 bodů

5.a) Pro velikosti výsledných elektrických sil působících na jednotlivé částice plyne z obr. R5 podle kosinové věty:

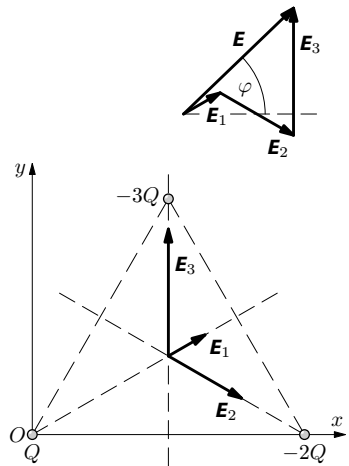
$$\begin{aligned}
 F_1^2 &= F_{12}^2 + F_{13}^2 - 2F_{12}F_{13} \cos 120^\circ = F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{12}F_{13} = \\
 &= \left(k \frac{2Q^2}{a^2}\right)^2 + \left(k \frac{3Q^2}{a^2}\right)^2 + k \frac{2Q^2}{a^2} \cdot k \frac{3Q^2}{a^2} = (4 + 9 + 6) \left(k \frac{Q^2}{a^2}\right)^2, \\
 F_2^2 &= F_{12}^2 + F_{23}^2 - 2F_{12}F_{23} \cos 60^\circ = F_{12}^2 + F_{23}^2 - F_{12}F_{23} = \\
 &= \left(k \frac{2Q^2}{a^2}\right)^2 + \left(k \frac{6Q^2}{a^2}\right)^2 - k \frac{2Q^2}{a^2} \cdot k \frac{6Q^2}{a^2} = (4 + 36 - 12) \left(k \frac{Q^2}{a^2}\right)^2, \\
 F_3^2 &= F_{13}^2 + F_{23}^2 - 2F_{13}F_{23} \cos 60^\circ = F_{13}^2 + F_{23}^2 - F_{13}F_{23} = \\
 &= \left(k \frac{3Q^2}{a^2}\right)^2 + \left(k \frac{6Q^2}{a^2}\right)^2 - k \frac{3Q^2}{a^2} \cdot k \frac{6Q^2}{a^2} = (9 + 36 - 18) \left(k \frac{Q^2}{a^2}\right)^2, \\
 F_1 &= \sqrt{19} \cdot k \frac{Q^2}{a^2}, \quad F_2 = \sqrt{28} \cdot k \frac{Q^2}{a^2}, \quad F_3 = \sqrt{27} \cdot k \frac{Q^2}{a^2},
 \end{aligned}$$

kde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Největší síla působí na částici s nábojem $-2Q$, její velikost je $2\sqrt{7} \cdot k \frac{Q^2}{a^2}$.

5 bodů



Obr.R5



Obr. R6

- b) Zvolme soustavu souřadnic podle obrázku R6. Intenzity způsobené jednotlivými nabitými částicemi v těžišti trojúhelníku složíme. Pak platí:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \quad E_2 = 2E_1, \quad E_3 = 3E_1,$$

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} + E_{x3} = E_1 \cos 30^\circ + 2E_1 \cos(-30^\circ) + 0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}E_1,$$

$$E_y = E_{y1} + E_{y2} + E_{y3} = E_1 \sin 30^\circ + 2E_1 \sin(-30^\circ) + 3E_1 = \frac{5}{2}E_1,$$

$$E_1 = k \frac{Q}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = 3k \frac{Q}{a^2}.$$

Výsledná intenzita elektrického pole má velikost

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}E_1\right)^2 + \left(\frac{5}{2}E_1\right)^2} = \sqrt{13} \cdot E_1 = 3\sqrt{13} \cdot k \frac{Q}{a^2}$$

a směrový úhel

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{arctg} \frac{5}{3\sqrt{3}} = 43,9^\circ.$$

5 bodů

- 7.a) Označme R_v odpor prodlužovacího kabelu, R_1 odpor varné konvice a U napětí v síťové zásuvce. Pak napětí na jedné zapnuté konvici na konci prodlužovacího kabelu je

$$U'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_v} U. \quad (1)$$

Z rovnosti elektrických energií dodaných varné konvici připojené bez kabelu přímo do síťové zásuvky a konvici připojené s kabelem plyne

$$\frac{U^2}{R_1} t_0 = \frac{U'^2_1}{R_1} t_1.$$

Po dosazení z (1) a po úpravě dostaneme

$$t_0 = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_v)^2} t_1. \quad (2)$$

Odmocněním vztahu (2) a úpravou nalezneme vztah mezi odpory R_1 a R_v :

$$\sqrt{t_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_v} \sqrt{t_1},$$

$$R_v = \frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0}} R_1. \quad (3)$$

4 body

Připojíme-li na konec kabelu paralelně dvě konvice, bude na nich napětí

$$U'_2 = \frac{\frac{R_1}{2}}{\frac{R_1}{2} + R_v} U = \frac{R_1}{R_1 + 2R_v} U. \quad (4)$$

Z rovnosti elektrických energií dodaných konvici připojené bez kabelu a jedné konvici připojené ve dvojici na konci kabelu

$$\frac{U^2}{R_1} t_0 = \frac{U^2 \left(\frac{R_1}{R_1 + 2R_v} \right)^2}{R_1} t_2 \Rightarrow t_2 = \left(\frac{R_1 + 2R_v}{R_1} \right)^2 t_0. \quad (5)$$

Po dosazení vztahu (3) a po úpravě dostaneme

$$t_2 = \left(\frac{R_1 + 2R_1 \frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0}}}{R_1} \right)^2 t_0 = \left(\frac{2\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0}} \right)^2 t_0 = (2\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0})^2 = 265 \text{ s.}$$

4 body

- b) Připojíme-li ke konci kabelu 2 konvice, zvětší se proud procházející kabelem přibližně na dvojnásobek, kabel se více zahřeje a odpor R_v ve vztahu (5) bude větší, než by vycházelo ze vztahu (3). Proud procházející jednou konvicí se sice nepatrně zmenší, ale odpor R_1 topné spirály se prakticky nezmění — odporové vodiče mají malý teplotní součinitel odporu. Protože ohřívání bude trvat o něco déle, budou i větší tepelné ztráty z konvice do okolí a energie dodaná konvici bude v případě dvou konvic o něco větší než při zapojení jedné konvice. Doba t_2 bude tedy ve skutečnosti o něco větší než vypočítaná za zjednodušujících předpokladů.

2 body