Řešení úloh krajského kola 54. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3) a J. Jírů (4)

1. a) Až do vzdálenosti s se kulička pohybuje rovnoměrně zpomaleně, na zpáteční cestě rovnoměrně zrychleně se zrychlením o stejné velikosti. Platí:

$$l = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2. \tag{1}$$

Doba výstupu do vzdálenosti s je $t_\mathrm{v} = \dfrac{t_1 + t_2}{2} = \dfrac{v_0}{a}$.

Kulička se pohybuje se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{2v_0}{t_1 + t_2}. \tag{2}$$

Po dosazení do (1) a úpravě

$$l = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2v_0}{t_1 + t_2} t_1^2 = v_0 \left(t_1 - \frac{t_1^2}{t_1 + t_2} \right) = v_0 \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2},$$

$$v_0 = \frac{l(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 0{,}675\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Pro velikost zrychlení pak dostáváme

$$a = \frac{2v_0}{t_1 + t_2} = \frac{2l}{t_1 t_2} = 0{,}45\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Kulička vystoupí do vzdálenosti

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left(\dfrac{l(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} \right)^2}{\dfrac{4v_0}{t_1 + t_2}} = \frac{l(t_1 + t_2)^2}{4 t_1 t_2} = 0{,}506\ \mathrm{m}.$$

6 bodů

b) Zvýší-li se velikost počáteční rychlosti na dvojnásobek, velikost zrychlení se při pohybu po nakloněné rovině nezmění. Pak

$$s_1 = \frac{4v_0^2}{2a} = \frac{l(t_1 + t_2)^2}{t_1 t_2} = 4s = 2{,}02\ \mathrm{m}.$$

Pro průchod světelnou závorou nyní platí

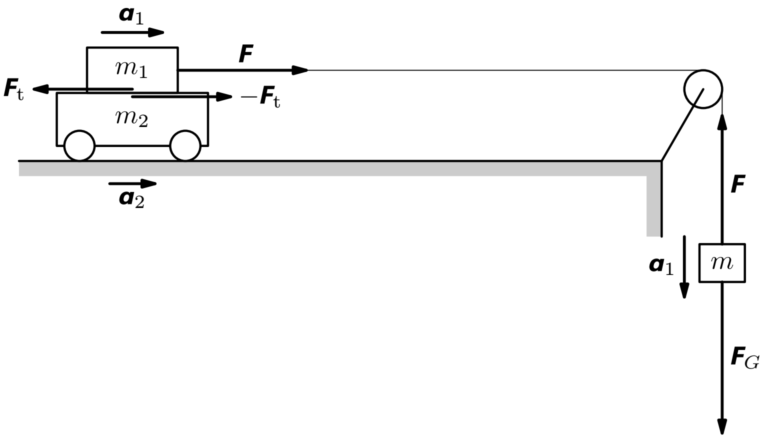
$$l = 2v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 - 2al}}{a}.$$

Dostáváme dva kořeny, z nichž menší $t_3 = 0{,}35$ s odpovídá průchodu kuličky závorou při pohybu nahoru, druhý $t_4 = 5{,}65$ s odpovídá průchodu kuličky při pohybu směrem dolů.

4 body

2. Vyjdeme z obr. R1, ve kterém jsou vyznačeny všechny síly působící v soustavě, které mají pohybový účinek. Na závaží působí tíhová síla a tahová síla niti, na hranolek tahová síla niti a třecí síla od vozíku, na vozík třecí síla od hranolku.

2 body



Obr. R1

a) Pohybuje-li se vozík současně s hranolkem, je $a_1 = a_2 = a$ a platí soustava pohybových rovnic

$$F_G - F = ma, \tag{1}$$

$$F - F_\mathrm{t} = m_1 a, \tag{2}$$

$$F_\mathrm{t} = m_2 a. \tag{3}$$

Řešením soustavy dostaneme

$$a = \frac{F_G}{m + m_1 + m_2} = \frac{m}{m + m_1 + m_2} g,$$

$$F = mg - ma = mg \frac{m_1 + m_2}{m + m_1 + m_2},$$

$$F_\mathrm{t} = m_2 a = mg \frac{m_2}{m + m_1 + m_2}.$$

Musí být ovšem splněna podmínka

$$F_\mathrm{t} \leq f m_1 g \quad \Rightarrow \quad f \geq \frac{F_\mathrm{t}}{m_1 g} = \frac{m m_2}{m_1(m + m_1 + m_2)} = f_\mathrm{min}.$$

Číselně vychází $f_\mathrm{min} = 0{,}31$, $a = 1{,}23\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $F = 0{,}43\ \mathrm{N}$.

4 body

b) Pokud je $f < f_\mathrm{min}$, hranolek se smýká po vozíku a třecí síla má velikost $F_\mathrm{t} = f_1 m_1 g$. Vozík se pohybuje s menším zrychlením než hranolek a platí soustava pohybových rovnic

$$mg - F_1 = ma_1, \tag{4}$$

$$F_1 - f_1 m_1 g = m_1 a_1, \tag{5}$$

$$f_1 m_1 g = m_2 a_2. \tag{6}$$

Z rovnice (6) určíme zrychlení vozíku $a_2 = \dfrac{f_1 m_1}{m_2} g$,

z rovnic (4) a (5) určíme zrychlení hranolku a závaží $a_1 = \dfrac{m - f_1 m_1}{m + m_1} g$.

Pro velikost síly napínající nit platí

$$F_1 = mg - ma_1 = mg\left(1 - \frac{m - f_1 m_1}{m + m_1}\right) = mg\frac{m_1(1 + f_1)}{m + m_1}.$$

Číselně vychází $a_1 = 1{,}64\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $a_2 = 0{,}98\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $F_1 = 0{,}41\ \mathrm{N}$.

4 body

3. a) Označíme m_1 hmotnost válečku a m_2 hmotnost oleje, c_1 měrnou tepelnou kapacitu materiálu válečku a c_2 měrnou tepelnou kapacitu oleje. Bude-li počáteční teplota oleje t, pak se teplota v prvním kalorimetru po vložení válečku ustálí na hodnotě $t + \Delta t_1$. Při vložení válečku do druhého kalorimetru se teplota ustálí na hodnotě $t + \Delta t_2$. Platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_1) - (t + \Delta t_2)] = m_1 c_1 (\Delta t_1 - \Delta t_2) = m_2 c_2 \Delta t_2. \tag{1}$$

Po vložení válečku do třetího kalorimetru se teplota lázně ustálí na hodnotě $t + \Delta t_3$. Platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_2) - (t + \Delta t_3)] = m_1 c_1 (\Delta t_2 - \Delta t_3) = m_2 c_2 \Delta t_3. \tag{2}$$

Ze vztahů (1) a (2) vyjádříme $\Delta t_3 = \dfrac{(\Delta t_2)^2}{\Delta t_1} = 1{,}25\ ^\circ\mathrm{C}$.

5 bodů

b) Při přenesení válečku do druhého kalorimetru teď platí

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_1) - (t + \Delta t_2')] = m_1 c_1 (\Delta t_1 - \Delta t_2') = \frac{m_2 c_2 \Delta t_2'}{2}. \tag{3}$$

Ze vztahů (1) a (3):

$$\frac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = \frac{\Delta t_2'}{2(\Delta t_1 - \Delta t_2')} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2' = \frac{2\Delta t_1 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = 8\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Přeneseme-li váleček do třetího kalorimetru, platí po ustálení teploty

$$m_1 c_1 [(t + \Delta t_2') - (t + \Delta t_3')] = m_1 c_1 (\Delta t_2' - \Delta t_3') = \frac{m_2 c_2 \Delta t_3'}{4}. \tag{4}$$

Ze vztahů (1) a (4): $\dfrac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = \dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = \dfrac{\Delta t_3'}{4(\Delta t_2' - \Delta t_3')}$,

$$\Delta t_3' = \frac{4\Delta t_2 \Delta t_2'}{3\Delta t_2 + \Delta t_1} = \frac{8(\Delta t_2)^2 \Delta t_1}{(3\Delta t_2 + \Delta t_1)(\Delta t_1 + \Delta t_2)} = 4{,}6\ ^\circ\mathrm{C}.$$

5 bodů

4. a) Píst se ustálí po vyrovnání tlaků, proto $p_1 = p_2$. V pravé části nádoby proběhl adiabatický děj, pro nějž platí:

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_2 \left(\frac{V_0}{2}\right)^{\varkappa} .$$

Z rovnice a z podmínky rovnosti tlaků plyne

$$p_1 = p_2 = 2^{\varkappa} p_0 = 2{,}64 p_0 = 2{,}64 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

2 body

b) V levé části nádoby užitím stavové rovnice dostaneme

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{2^{\varkappa} p_0 \frac{3}{2} V_0}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 3 \cdot 2^{\varkappa - 1} \cdot T_0 = 3{,}96 T_0 = 1\,160 \text{ K.}$$

V pravé části nádoby užitím stavové rovnice dostaneme

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{2^{\varkappa} p_0 \frac{1}{2} V_0}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2^{\varkappa - 1} \cdot T_0 = 1{,}32 T_0 = 387 \text{ K.}$$

4 body

c) Plyn v pravé části nádoby nepřijímá ani neodevzdává teplo, proto přijatá práce je rovna přírůstku jeho vnitřní energie:

$$W_2 = \Delta U_2 = \frac{5}{2} p_2 V_2 - \frac{5}{2} p_0 V_0 = \frac{5}{2} \left(2^{\varkappa} p_0 \cdot \frac{V_0}{2} - p_0 V_0 \right) = \frac{5}{2} p_0 V_0 (2^{\varkappa - 1} - 1).$$

Plyn v levé části nádoby stejně velkou práci vykoná, tedy $W_1' = W_2$. Přírůstek vnitřní energie plynu v levé části nádoby je

$$\Delta U_1 = \frac{5}{2} p_1 V_1 - \frac{5}{2} p_0 V_0 = \frac{5}{2} \left(2^{\varkappa} p_0 \cdot \frac{3V_0}{2} - p_0 V_0 \right) = \frac{5}{2} p_0 V_0 (3 \cdot 2^{\varkappa - 1} - 1).$$

Plyn v levé části nádoby přijme teplo

$$Q_1 = W_1' + \Delta U_1 = \frac{5}{2} p_0 V_0 (2^{\varkappa - 1} - 1) + \frac{5}{2} p_0 V_0 (3 \cdot 2^{\varkappa - 1} - 1) = \\ = 5 p_0 V_0 (2^{\varkappa} - 1) = 8{,}20 p_0 V_0 = 1{,}64 \text{ kJ.}$$

4 body