

**Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B**

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4), M. Jarešová (5), J. Jírů (3), V. Vicha (6),  
P. Šedivý (7)

1. a) Pro souřadnice míče při letu platí:  $x = v_0 t \cos \alpha$ ,  $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$ .

Když z rovnic vyloučíme čas, dostáváme:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1). \quad (1)$$

Dosazením souřadnic cíle  $x = d$ ,  $y = h$  dojdeme k rovnici

$$g d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 d v_0^2 \operatorname{tg} \alpha + 2 v_0^2 h + g d^2 = 0$$

s kořeny

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2 g h v_0^2 - g^2 d^2}}{g d}. \quad (2)$$

Při malé počáteční rychlosti nemůže míč zasáhnout cíl při žádném elevačním úhlu. Musí být splněna podmínka  $v_0^4 - 2 g h v_0^2 - g^2 d^2 \geq 0$ .

Řešením bikvadratické rovnice  $v_0^4 - 2 g h v_0^2 - g^2 d^2 = 0$  dostáváme kořeny

$$v_0^2 = g(h \pm \sqrt{h^2 + d^2}).$$

Smysl má jen kladný kořen, který je druhou mocninou hledané minimální rychlosti, takže

$$v_{0\min} = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + d^2})} = 16,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dosazením  $v_{0\min}$  do vztahu (2) dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{0\min}^2}{g d} = \frac{h + \sqrt{h^2 + d^2}}{d} = 1,10, \quad \alpha = 47,7^\circ.$$

Doba letu míče  $t = \frac{d}{v_{0\min} \cos \alpha} = 2,3 \text{ s}$ .

**6 bodů**

- b) Dosazením za  $v_0$  do vztahu (2) dostáváme dva kořeny:

$\operatorname{tg} \alpha_1 = 2,02$ ,  $\alpha_1 = 63,7^\circ$ , kterému odpovídá doba letu  $t_1 = 3,1 \text{ s}$ ,

$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,62$ ,  $\alpha_2 = 31,8^\circ$ , kterému odpovídá doba letu  $t_2 = 1,6 \text{ s}$ .

Zadání úlohy vyhovuje  $\alpha_2$  a  $t_2$ .

**4 body**

---

*Jiný způsob řešení úlohy a)*

Z rovnice  $h = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$  vyjádříme podíl  $\frac{1}{v_0^2} = \frac{(d \operatorname{tg} \alpha - h) 2 \cos^2 \alpha}{g d^2}$ ,

který musí být maximální, tedy musí být maximální hodnota výrazu

$$V = (d \operatorname{tg} \alpha - h) \cos^2 \alpha = d \sin \alpha \cos \alpha - h \cos^2 \alpha.$$

Musí tedy platit

$$\frac{dV}{d\alpha} = d(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2h \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Po úpravě

$$d \operatorname{tg}^2 \alpha - 2h \operatorname{tg} \alpha - d = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + d^2}}{d}.$$

Zadání vyhovuje jen kladný kořen, který vede ke stejným výsledkům:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,10, \quad \alpha = 47,7^\circ \quad \text{a} \quad v_{0\min} = 16,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(Pomocí druhé derivace se můžeme přesvědčit, že výraz  $V$  dosahuje maxima.)

*Řešení části a) užitím rovnice ochranné paraboly:*

Ochranná parabola o rovnici  $x^2 = -4H(y - H)$ , kde  $H = \frac{v_0^2}{2g}$ , vymezuje množinu bodů, které lze při vrhu zasáhnout při dané velikosti  $v_0$  počáteční rychlosti. Bod o souřadnicích  $x = d$  a  $y = h$ , který leží na ochranné parabole, odpovídá jednomu reálnému řešení rovnice (1). Po dosazení a úpravě dostáváme již známou bikvadratickou rovnici  $v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2d^2 = 0$  s kořeny  $v_0^2 = = g(h \pm \sqrt{h^2 + d^2})$ . Ze vztahu (1) pak dostaneme  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{0\min}^2}{gd}$ .

- 2.a) Vydeme z obrázku R1. Pokud kapalina dokonale smáčí stěny nádoby, vystoupí voda v kapiláře do výšky  $h$ , ve které bude kapilární tlak

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r}, \quad \text{kde} \quad r = r_0 + h \operatorname{tg} \alpha,$$

roven hydrostatickému tlaku sloupce kapaliny o výšce  $h$ :  $p_h = h\varrho g$ . Tedy

$$h\varrho g = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r_0 + h \operatorname{tg} \alpha}.$$

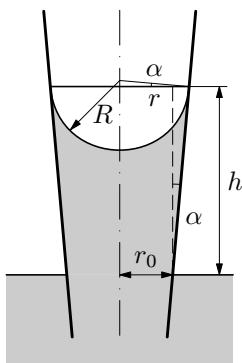
Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $h^2\varrho g \operatorname{tg} \alpha + h\varrho g r_0 - 2\sigma \cos \alpha = 0$ .

Řešení úlohy vyhovuje kladný kořen

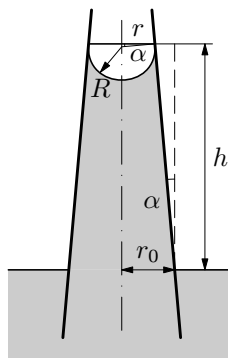
$$h = \frac{-\varrho g r_0 + \sqrt{(\varrho g r_0)^2 + 8\sigma \varrho g \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}}{2\varrho g \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + \frac{8\sigma \sin \alpha}{\varrho g}}}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Číselně pro vodu  $h = 35$  mm, pro líh  $h = 16$  mm.

**5 bodů**



Obr. R1



Obr. R2

- b) Vyjdeme z obrázku R2. V tomto případě  $r = r_0 - h \operatorname{tg} \alpha$  a kvadratická rovnice má tvar  $h^2 \rho g \operatorname{tg} \alpha - h \rho g r_0 + 2\sigma \cos \alpha = 0$ . Řešením dostaneme

$$h = \frac{\rho g r_0 \pm \sqrt{(\rho g r_0)^2 - 8\sigma \rho g \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}}{2\rho g \operatorname{tg} \alpha} = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - \frac{8\sigma \sin \alpha}{\rho g}}}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Pro vodu je  $r_0^2 < \frac{8\sigma \sin \alpha}{\rho g}$ , rovnice tedy nemá reálné řešení. Během stoupání hladiny v kapiláře je kapilární tlak trvale větší než hydrostatický a voda vystoupí až k hornímu konci kapiláry. Pro líh má rovnice dva kořeny  $h_1 = 28 \text{ mm}$  a  $h_2 = 58 \text{ mm}$ . Stabilní je ale jen první poloha hladiny. Druhá poloha je nestabilní. Stačí malé vychýlení hladiny směrem nahoru a kapilární tlak bude větší než tlak hydrostatický. Hladina kapaliny se posune až k hornímu okraji kapiláry. Naopak při malém vychýlení hladiny směrem dolů bude kapilární tlak menší než tlak hydrostatický. Hladina kapaliny se posune do dolní rovnovážné polohy.

### 5 bodů

*Poznámka:* Protože úhel  $\alpha$  je velmi malý, platí  $\cos \alpha \approx 1 \Rightarrow r \approx R$ . Při použití této aproximace, což by mělo být v komentáři k řešení uvedeno, dostaneme v části a) výsledek

$$h = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + \frac{8\sigma \operatorname{tg} \alpha}{\rho g}}}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

a v části b) výsledek

$$h = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - \frac{8\sigma \operatorname{tg} \alpha}{\rho g}}}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Jelikož  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ , numerické výsledky získané při použití uvedené aproximace jsou stejné jako výše uvedené.

- 3.a) Při přibližování zdroje vysílajícího zvukové vlnění s frekvencí  $f_z$  k pozorovateli, který je v klidu vzhledem k okolnímu prostředí (k atmosféře), přijímá pozorovatel zvukové vlnění s frekvencí

$$f_p = \frac{c}{c - v} f_z,$$

při vzdalování s frekvencí

$$f_p' = \frac{c}{c + v} f_z,$$

kde  $c$  je rychlost šíření vlnění v okolním prostředí a  $v$  velikost rychlosti zdroje vzhledem k okolnímu prostředí. Z rovnic pro poměr frekvencí  $k$  plyne

$$k = \frac{f_p}{f_p'} = \frac{c + v}{c - v}. \quad (1)$$

Z rovnice vyjádříme hledanou velikost rychlosti zdroje

$$v = \frac{k - 1}{k + 1} c = \frac{\frac{6}{5} - 1}{\frac{6}{5} + 1} c = \frac{1}{11} c = \frac{1}{11} \cdot 346 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 113 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

**5 bodů**

- b) Pro kvocient  $q$  geometrické posloupnosti platí  $f_{12} = f_0 \cdot q^{12}$ , kde podle zadání je  $f_{12} = 2f_0$ .

Z toho  $q = \sqrt[12]{2}$ .

Z rovnice (1) plyne

$$\frac{f_p}{f_p'} = \frac{c + v}{c - v} = \frac{346 + 85}{346 - 85} = \frac{431}{261} = 1,651.$$

Řešením rovnice  $1,651 = (\sqrt[12]{2})^x = 2^{\frac{x}{12}}$  dostaneme

$$x = 12 \cdot \frac{\log 1,651 \ 34}{\log 2} = 8,7.$$

Hledaný interval je 8 až 9 půltónů, což je v hudební akustice nehudební interval ležící mezi malou sextou (8 půltónů) a velkou sextou (9 půltónů).

**5 bodů**

- 4.a) Perioda kmitů fyzického kyvadla s vodorovnou osou je  $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla,  $D = Mgd$  je směrný moment výslednice tíhových sil působících na kyvadlo,  $M = 3m$  je celková hmotnost kyvadla,  $d$  je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. U našeho kyvadla je

$$d = \frac{2 \cdot m \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha + ml \cos \alpha}{3m} = \frac{2}{3}l \cos \alpha, \quad D = 2mgl \cos \alpha.$$

**2 body**

Moment setrvačnosti obou tyčí je stejný jako u jediné tyče hmotnosti  $2m$  a délky  $l \cos \alpha$  kolmé k ose otáčení procházející jejím koncem. Celkový moment setrvačnosti kyvadla je

$$J = \frac{1}{3} \cdot 2m \cdot (l \cos \alpha)^2 + m(l \cos \alpha)^2 = \frac{5}{3}ml^2 \cos^2 \alpha.$$

**3 body**

Doba kmitu je tedy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{3}ml^2 \cos^2 \alpha}{2mgl \cos \alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l \cos \alpha}{6g}} = 0,79 \text{ s.}$$

**2 body**

- b) Sklopením osy se moment setrvačnosti nezmění, ale z tíhové síly se uplatní jen složka kolmá k ose otáčení, která má velikost  $3mg \cos \beta$ . Směrný moment kyvadla se tedy zmenší na

$$D_1 = 2mgl \cos \alpha \cos \beta$$

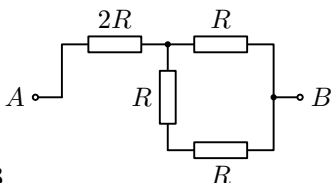
a perioda kyvadla se zvětší na

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l \cos \alpha}{6g \cos \beta}} = 1,12 \text{ s.}$$

**3 body**

5.a) Existuje celkem 5 různých možností poškození rezistorů:

1. Přepálí se levý dolní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R3.



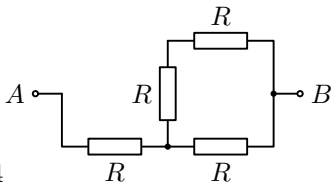
Obr. R3

Výsledný odpor mezi body  $A$  a  $B$  je pak dán vztahem

$$R_1 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{8}{3}R.$$

**1 bod**

2. Přepálí se levý horní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R4.



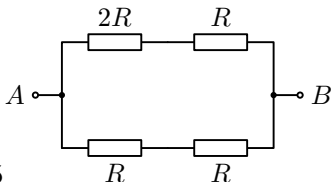
Obr. R4

Výsledný odpor mezi body  $A$  a  $B$  je pak dán vztahem

$$R_2 = R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{5}{3}R.$$

**1 bod**

3. Přepálí se prostřední rezistor. Náhradní schéma je na obr. R5.



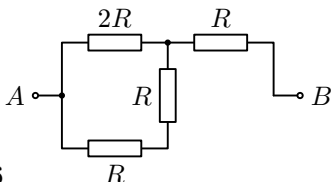
Obr. R5

Výsledný odpor mezi body  $A$  a  $B$  je pak dán vztahem

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}} = \frac{6}{5}R.$$

**1 bod**

4. Přepálí se pravý dolní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R6.



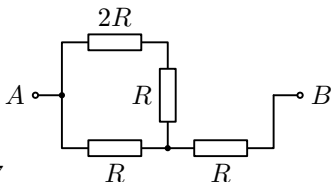
Obr. R6

Výsledný odpor mezi body  $A$  a  $B$  je pak dán vztahem

$$R_4 = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} + R = 2R.$$

**1 bod**

5. Přepálí se pravý horní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R7.



Obr. R7

Výsledný odpor mezi body  $A$  a  $B$  je pak dán vztahem

$$R_5 = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{R}} + R = \frac{7}{4}R.$$

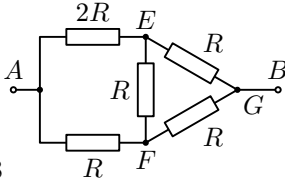
**1 bod**

- b) Výpočtem jsme zjistili, že  $R_1 = \frac{8}{3}R = \frac{160}{60}R$ ,  $R_2 = \frac{5}{3}R = \frac{100}{60}R$ ,  
 $R_3 = \frac{6}{5}R = \frac{72}{60}R$ ,  $R_4 = 2R = \frac{120}{60}R$ ,  $R_5 = \frac{7}{4}R = \frac{105}{60}R$ .

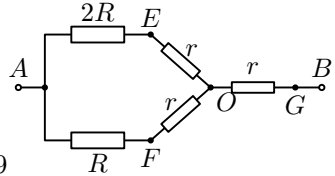
Je-li odpor obvodu co nejmenší, je poškozen prostřední rezistor. Je-li odpor obvodu co největší, je poškozen levý dolní rezistor.

**1 bod**

- c) Úlohu můžeme v tomto případě řešit např. užitím tranfigurace, kdy si původní obvod obr. R8 překreslíme na obvod uvedený na obr. R9.



Obr. R8



Obr. R9

Užitím tranfigurace trojúhelník – hvězda dostaneme

$$R_{EG} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R = 2r,$$

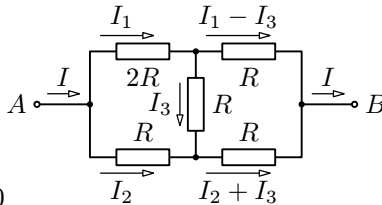
z čehož  $r = \frac{R}{3}$ . Zbývající hodnoty odporů dostaneme z úvahy o symetrii.

Potom

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}R} + \frac{1}{\frac{7}{3}R}} + \frac{R}{3} = \frac{13}{11}R.$$

*Poznámka:*

Tuto část je možno také řešit užitím Kirchhoffových zákonů (viz obr. R10).



Obr. R10

Podle Kirchhoffových zákonů pro uzel a pro smyčky platí

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2, \\ 2RI_1 + RI_3 - RI_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$R(I_1 - I_3) - R(I_2 + I_3) - RI_3 = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme neznámou  $I_2 = 2I_1 + I_3$  a dosadíme do třetí rovnice. Dostaneme  $I_1 - 2I_1 - I_3 - 3I_3 = 0$ , z čehož  $I_1 = -4I_3$ . Potom  $I_2 = 2 \cdot (-4I_3) + I_3 = -7I_3$ . Po dosazení za  $I_1$  a  $I_2$  do první rovnice dostaneme  $I = -4I_3 - 7I_3 = -11I_3$ , z čehož  $I_3 = -\frac{1}{11}I$  (proud prochází opačným směrem, než bylo vyznačeno). Potom  $I_1 = \frac{4}{11}I$ ,  $I_2 = \frac{7}{11}I$ . Nyní už můžeme psát

$$R_{AB}I = 2RI_1 + R(I_1 - I_3) = 2R \cdot \frac{4}{11}I + R \left[ \frac{4}{11} - \left( -\frac{1}{11} \right) \right] I = \frac{13}{11}RI,$$

z čehož  $R_{AB} = \frac{13}{11}R$ .

**3 body**

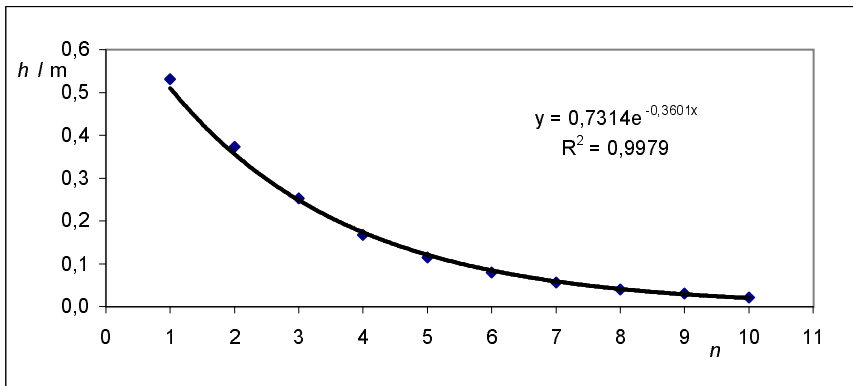
- d) Nejméně se odpor obvodu změní ve 3. případě, a to tak, že vzroste o hodnotu  $\Delta R_3 = \left( \frac{6}{5} - \frac{13}{11} \right) R = \frac{1}{55}R$ , a tedy  $\delta R_3 = \frac{\Delta R_3}{R_{AB}} = \frac{1}{65} \doteq 1,5 \%$ , což je téměř zanedbatelné. Nejvíce se odpor obvodu zvětší v 1. případě, a to o hodnotu  $\Delta R_1 = \left( \frac{8}{3} - \frac{13}{11} \right) R = \frac{49}{33}R$ , a tedy  $\delta R_1 = \frac{\Delta R_1}{R_{AB}} = \frac{49}{39} \doteq 126 \%$ .

**1 bod**



6. a-e) Hodnotám naměřeným v ukázce uvedené v zadání přísluší následující tabulka a graf:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t / s$	0,553	1,211	1,763	2,217	2,586	2,891	3,146	3,359	3,54	3,698	3,829
$\tau / s$	0,658	0,552	0,454	0,369	0,305	0,255	0,213	0,181	0,158	0,131	///
$h / m$	0,531	0,374	0,253	0,167	0,114	0,080	0,056	0,040	0,031	0,021	///
$\tau_{i+1} / \tau_i$	0,839	0,822	0,813	0,827	0,836	0,835	0,850	0,873	0,829	průměr	0,836
										směrodatná odchylka	0,017



Z tabulky je zřejmé, že doby poskoků tvoří geometrickou posloupnost, neboť poměr sousedních dob poskoku je prakticky konstantní. Kvocient posloupnosti je  $q = 0,836 \pm 0,017$ . Celkovou dobu poskoků určíme pomocí vzorce pro součet nekonečné geometrické řady:

$$t_{\text{celk}} = \frac{\tau_1}{1 - q} \doteq 4,0 \text{ s.}$$

Tato hodnota souhlasí s hodnotou, kterou odečteme ze záznamu.

f) Poskok míčku je svislý vrh vzhůru se zanedbatelným odporem vzduchu. Pro doby letu platí

$$\tau_i = \frac{2v_i}{g}, \quad \tau_{i+1} = \frac{2v_{i+1}}{g}, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} = q.$$

g) Pro výšku poskoku platí  $h_i = \frac{1}{2}g \left( \frac{\tau_i}{2} \right)^2 = \frac{g\tau_i^2}{8}$ .

Poměr výšek dvou po sobě následujících poskoků je rovněž konstantní:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{\tau_{i+1}^2}{\tau_i^2} = q^2.$$

To potvrzuje výsledek exponenciální regrese uvedený v grafu.

- 7.a) Označme  $\alpha$  polovinu středového úhlu té části obvodu disku, které se nedotýká drát (obr. R11). Tíha disku se v bodě závěsu rozkládá na dvě tahové síly drátu  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}'$  (obr. R12), které mají velikost

$$F = F' = \frac{mg}{2 \sin \alpha}.$$

Prodloužení drátu  $\Delta l$  splňuje Hookův zákon. Platí

$$\Delta l = 2(R \operatorname{tg} \alpha - R\alpha) = \frac{Fl_0}{ES},$$

kde  $l_0 = 2\pi R$  je délka nezatíženého drátu a  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  plošný obsah jeho průřezu. Spojením uvedených vztahů dostaneme

$$F = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{\Delta l ES}{l_0} = \frac{2R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)E \frac{\pi d^2}{4}}{2\pi R},$$

po úpravě

$$2mg - (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \sin \alpha \cdot Ed^2 = 0. \quad (1)$$

Rovnici (1) můžeme podstatně zjednodušit použitím aproximací

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

Pak

$$2mg \approx \frac{\alpha^4}{3} Ed^2, \quad \alpha \approx \sqrt[4]{\frac{6mg}{Ed^2}} = 0,196 \text{ rad} = 11,3^\circ.$$

**6 bodů**

Nyní už můžeme vypočítat vzdálenost  $x$  bodu závěsu od obvodu disku:

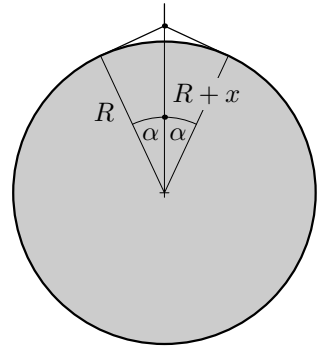
$$x = \frac{R}{\cos \alpha} - R = 3,9 \text{ mm}.$$

**1 bod**

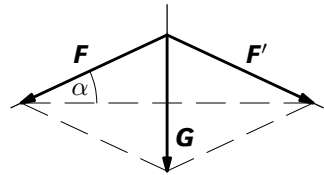
- b) Normálové napětí drátu je  $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{2mg}{\pi d^2 \sin \alpha} = 180 \text{ MPa}$ ,

což je podstatně méně než mez úměrnosti. Použití Hookova zákona v části a) bylo tedy oprávněné.

**2 body**



Obr. R11



Obr. R12

c) Část drátu, která se nedotýká disku, má délku  $2R \operatorname{tg} \alpha = 80$  mm. **1 bod**

*Poznámka:* Chceme-li ověřit oprávněnost použití aproximace při zjednodušení rovnice (1), musíme tuto transcendentní rovnici s neznámou  $\alpha$  vyřešit nějakou numerickou metodou. Dosadíme číselné hodnoty a rovnici upravíme na tvar

$$f(\alpha) = 39,24 - (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \sin \alpha \cdot 79200 = 0.$$

V tabulce Excelu se funkce  $f(\alpha)$  přiblížila k nulové hodnotě při

$$\alpha \doteq 0,196 \text{ rad} = 11,2^\circ,$$

což při dané přesnosti souhlasí s předchozím výsledkem.

$\alpha$	$f(\alpha)$
0,1	36,5938
0,15	25,8041
0,19	4,5407
0,192	3,0499
0,193	2,2866
0,194	1,5113
0,195	0,7237
0,196	-0,0761
0,197	-0,8884
0,198	-1,7133
0,2	-3,4014