

- 4.a) Označme v_1 velikost obvodové rychlosti na konci první otočky, a_2 velikost tečného zrychlení během třetí otočky.

Pro první otočku platí:

$$2\pi r = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad (1)$$

$$v_1 = a_1 t_1.$$

Z rovnic plyne

$$2\pi r = \frac{1}{2} v_1 t_1. \quad (2)$$

Pro druhou otočku platí

$$2\pi r = v_1 t_2. \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) dostaneme $t_2 = \frac{t_1}{2} = 4,5$ s.

2 body

- b) Z rovnice (1) dostaneme $a_1 = \frac{4\pi r}{t_1^2} = 0,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 body

- c) Z rovnice (2) plyne $v_1 = \frac{4\pi r}{t_1}$. Dosazením do vzorce $a_d = \frac{v_1^2}{r}$ dostaneme $a_d = \frac{16\pi^2 r}{t_1^2} = 4,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 body

- d) Hledanou velikost rychlosti určíme ze vztahu $v_2 = v_1 + a_2 t_3$, do něhož potřebujeme pro třetí otočku velikost počáteční rychlosti v_1 a velikost tečného zrychlení a_2 .

Pro velikost počáteční rychlosti užitím výsledku úlohy b) dostaneme

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{4\pi r}{t_1}.$$

Dále pro třetí otočku platí $2\pi r = v_1 t_3 + \frac{1}{2} a_2 t_3^2$.

Z rovnice plyne $a_2 = 2 \cdot \frac{2\pi r - v_1 t_3}{t_3^2}$.

Po dosazení a úpravě dostaneme $v_2 = 4\pi r \frac{t_1 - t_3}{t_1 t_3} = 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 body

Řešení úloh krajského kola 53. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: P. Šedivý 1, J. Jirů 2, 3, 4

- 1.a) Pohyb po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený, pohyb po vodorovné rovině je rovnoměrný. Platí

$$l_1 = \frac{vt_1}{2}, \quad l_2 = vt_2.$$

Řešením soustavy rovnic

$$t_1 + t_2 = t, \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{2l_1}{v}}{\frac{l_2}{v}} = \frac{2l_1}{l_2}$$

dostaneme

$$t_1 = \frac{2l_1}{2l_1 + l_2} t = 2,0 \text{ s}, \quad t_2 = \frac{l_2}{2l_1 + l_2} t = 1,5 \text{ s}.$$

3 body

- b) Celková doba pohybu je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2l_1}{v} + \frac{l_2}{v}.$$

Z toho

$$v = \frac{2l_1 + l_2}{t} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- c) Potenciální energie kuličky při startu je rovna kinetické energii valivého pohybu na konci nakloněné roviny a na vodorovné rovině:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Z toho

$$h = \frac{7}{10} \cdot \frac{v^2}{g} = \frac{7(2l_1 + l_2)^2}{10gt^2} \doteq 0,29 \text{ m}.$$

4 body

2.a) Ze zákona zachování hybnosti

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$$

plyne

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1v_1}{m_2} = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

b) Práce je rovna rozdílu kinetických energií po působení síly a před jejím působením:

$$W = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 48 \text{ J}.$$

3 body

c) Velikost zrychlení partnera je

$$a_1 = \frac{v - v_1}{\Delta t} = 0,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

velikost zrychlení partnerky

$$a_2 = \frac{v_2 - v}{\Delta t} = 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Velikost působící síly určíme jako akci partnera nebo jako reakci partnerky pomocí druhého Newtonova pohybového zákona

$$F = m_1a_1 = m_2a_2 = 70 \text{ N}.$$

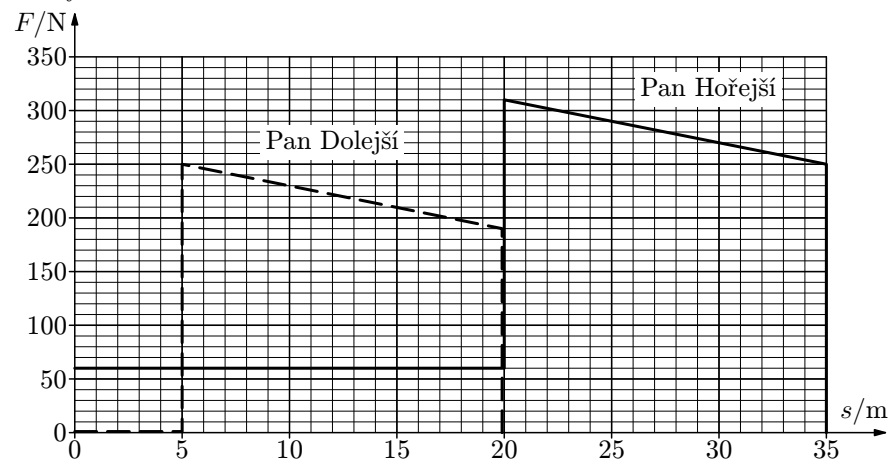
4 body

Poznámka:

V případě, že student vyřeší úlohu b) obecně (což se v zadání nepožaduje), vyjde

$$W = \frac{m_1(m_1 + m_2)(v - v_1)^2}{2m_2}.$$

3.a) Grafy závislosti sil na dráze:



6 bodů

b) Práci lze určit z grafu jako obsah plochy pod grafem. Pan Hořejší vykonal práci

$$W_H = \left(60 \cdot 20 + 250 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 15 \right) \text{ J} = 5400 \text{ J}.$$

Pan Dolejší vykonal práci

$$W_D = \left(190 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 15 \right) \text{ J} = 3300 \text{ J}.$$

Jiná možnost určení práce:

Hmotnost celého lana je 14 kg, hmotnost lana délky 15 m je 6 kg. Pan Hořejší musí vytáhnout celé lano, přičemž visící část lana délky 15 m má již počáteční potenciální energii $E_0 = mgh = 6 \cdot 10 \cdot 7,5 \text{ J} = 450 \text{ J}$ (těžiště visící části je v poloviční výšce plošiny). Potenciální energie celého lana na plošině vzhledem k zemi je $E_1 = 14 \cdot 10 \cdot 15 \text{ J} = 2100 \text{ J}$, potenciální energie břemene $E_b = 25 \cdot 10 \cdot 15 \text{ J} = 3750 \text{ J}$.

Práce, kterou vykonal pan Hořejší je

$$W_H = E_b + E_1 - E_0 = 5400 \text{ J}.$$

Pan Dolejší vytáhl břemeno vykonáním práce 3750 J a spotřeboval práci 450 J tím, že o tuto hodnotu během druhé fáze vytahování zmenšil potenciální energii lana. Vykonal tedy práci

$$W_D = E_b - E_0 = 3300 \text{ J}.$$

4 body