

**Řešení úloh 1. kola 52. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A**

Autoři úloh: I. Charvát (1), J. Thomas (2, 3), P. Šedivý (4 až 7)

- 1.a) Aby obě tělesa dopadla do stejného místa, musí jejich trajektorie ležet v téže svislé rovině. V ní zavedeme obvyklým způsobem pravoúhlou souřadnicovou soustavu  $Oxy$ . Vyjdeme ze vzorců pro výpočet doby letu  $T$  a délky vrhu  $L$  šikmého vrhu s počáteční rychlostí o velikosti  $v_0$  a elevačním úhlem  $\alpha$ :

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha, \quad L = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha), \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ze zadání úlohy plyne pro doby letu  $T_1, T_2$  prvního a druhého tělesa

$$T_1 > T_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 > \alpha_2. \quad (1)$$

Délky  $L_1, L_2$  obou vrhů jsou stejné, proto

$$\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2),$$

což může být vzhledem k vlastnostem funkce sinus splněno, jen když

$$2\alpha_1 = \pi - 2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2.$$

Pak ale můžeme provést substituci

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \varphi, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \varphi, \quad \text{kde } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \quad (2)$$

Druhé těleso musí být vrženo se zpožděním

$$\Delta t = T_1 - T_2 = \frac{2v_0}{g}(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = \frac{2v_0}{g}(\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1). \quad (3)$$

*Závěr:* Aby obě tělesa dopadla současně do téhož místa, musí být splněny podmínky (1), (2) a (3).

**5 bodů**

- b) Pro dané hodnoty vychází  $L = 83,8$  m,  $T_1 = 5,13$  s,  $T_2 = 3,33$  s,  $\Delta t = 1,80$  s.

Pohyb prvního tělesa popisují kinematické zákony

$$x_1 = v_0 \cos \alpha_1 t, \quad (4)$$

$$y_1 = v_0 \sin \alpha_1 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{pro } t \in (0, T_1). \quad (5)$$

Vyjádřením času  $t$  z (4) a dosazením do (5) dostaneme rovnici trajektorie

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_1} x_1^2, \quad \text{pro } x_1 \in (0, L). \quad (6)$$

Pro druhé těleso platí

$$x_2 = v_0 \cos \alpha_2 (t - \Delta t), \quad (7)$$

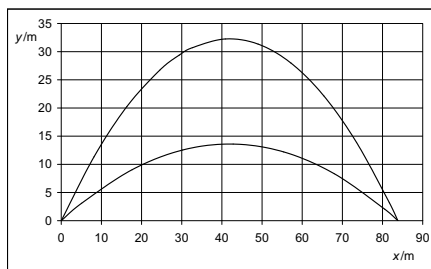
$$y_2 = v_0 \sin \alpha_2 (t - \Delta t) - \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2, \quad \text{pro } t \in (\Delta t, T_1). \quad (8)$$

$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_2} x_2^2, \quad x_2 \in \langle 0, L \rangle, \quad (9)$$

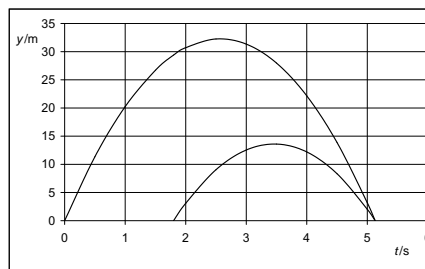
což musíme doplnit vztahem

$$x_2 = y_2 = 0 \quad \text{pro } \langle 0, \Delta t \rangle. \quad (10)$$

Trajektorie těles můžeme nakreslit například v Excelu jako grafy funkcí (6) a (9) s přihlédnutím k (10). Přitom bychom měli na obou osách nastavit stejné měřítko (obr. R1). Grafy závislosti výšky těles na čase získáme podobně jako grafy funkcí (5) a (8) s přihlédnutím k (10) (obr. R2).



Obr. R1



Obr. R2

**5 bodů**

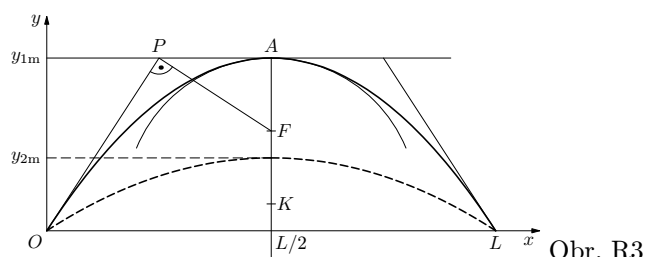
*Alternativní řešení úlohy b):* Hledané grafy jsou úseky parabol. Můžeme je přibližně sestavit „ručně“ konstrukcí parabol podle obr. R3. V takovém případě však musíme ještě určit výšky výstupu obou těles

$$y_{1m} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha_1 = 32,3 \text{ m}, \quad y_{2m} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha_2 = 13,6 \text{ m}.$$

Vycházíme z těchto vlastností paraboly:

- Tečna v bodě paraboly pólí úsek na tečně vrcholové.
- Kolmice vedená z ohniska paraboly k tečně má patu na tečně vrcholové.
- Poloměr oskulační kružnice ve vrcholu paraboly je dvojnásobkem vzdálenosti ohniska od vrcholu.

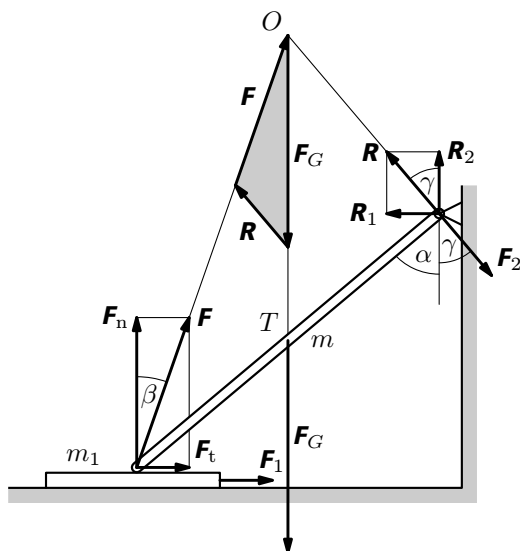
Po narysování oskulační kružnice ve vrcholu a tečen v nejnižších bodech graf snadno dokreslíme pomocí křivítka.



- 2.a) Nejprve určíme všechny síly, které při pohybu desky působí na tyč. Jsou tři: tíhová síla  $F_G$ , síla  $F$  od desky a reakce  $R$  kloubu. Tyto síly jsou v rovnováze, jejich různoběžné vektorové přímky tedy procházejí tímž bodem  $O$  a vektorový součet sil je nulový – síly tvoří vektorový trojúhelník (obr. R4). Protože se povrch desky smýká po dolním konci tyče, platí pro velikosti tečné složky  $F_t$  (třecí síly) a normálové složky  $F_n$  síly  $F$

$$F_t = fF_n \Rightarrow f = \frac{F_t}{F_n} = \operatorname{tg} \beta,$$

kde  $\beta$  je odchylka síly  $F$  od svislého směru.



Obr. R4

Délku tyče označme  $l$ . Z momentové věty vzhledem ke kloubu plyne

$$F_G \frac{l}{2} \sin \alpha + F_t l \cos \alpha - F_n l \sin \alpha = mg \frac{l}{2} \sin \alpha + f F_n l \cos \alpha - F_n l \sin \alpha = 0,$$

$$F_n = \frac{mg \sin \alpha}{2(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Úloze vyhovuje pouze kladný výsledek  $F_n > 0$ . Aby mohlo dojít k pohybu desky, musí být tedy splněna podmínka

$$\sin \alpha > f \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha > f = \operatorname{tg} \beta,$$

jinak dojde ke vzpěru a desku nevedeme do pohybu ke stěně sebevětší silou, dokud nedojde k deformaci tyče. **3 body**

Je-li podmínka  $\operatorname{tg} \alpha > f$  splněna, posuneme desku ke stěně rovnoměrným pohybem působením síly o velikosti

$$F_1 = F_t = \frac{mgf \sin \alpha}{2(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Pro vodorovnou a svislou složku reakce kloubu  $\mathbf{R}$  plyne z podmínek rovnováhy

$$R_1 = F_t, \quad R_2 = mg - F_n.$$

Z toho určíme její velikost  $R$  a odchylku  $\gamma$  od svislého směru:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

Podle principu akce a reakce působí tyč na kloub silou  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{R}$ .

Pro dané hodnoty vychází  $\beta = 19,3^\circ < \alpha$ ,  $F_n = 69,4 \text{ N}$ ,

$$F_1 = F_t = R_1 = 24,3 \text{ N}, \quad R_2 = 28,7 \text{ N}, \quad R = F_2 = 37,6 \text{ N}, \quad \gamma = 40,3^\circ.$$

**2 body**

- b) Vyjdeme z obr. R5 a postupujeme obdobně jako v a). Podle momentové věty vzhledem ke kloubu je

$$F_G \frac{l}{2} \sin \alpha - F_t l \cos \alpha - F_n l \sin \alpha = mg \frac{l}{2} \sin \alpha - f F_n l \cos \alpha - F_n l \sin \alpha = 0,$$

$$F_n = \frac{mg \sin \alpha}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)},$$

$$F_3 = F_t = R_1 = \frac{mgf \sin \alpha}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

$$R_2 = mg - F_n, \quad R = F_4 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

Pro dané hodnoty vychází  $F_n = 37,9 \text{ N}$ ,

$$F_3 = F_t = R_1 = 13,3 \text{ N}, \quad R_2 = 60,2 \text{ N}, \quad R = F_4 = 61,6 \text{ N}, \quad \gamma = 12,4^\circ.$$

**3 body**

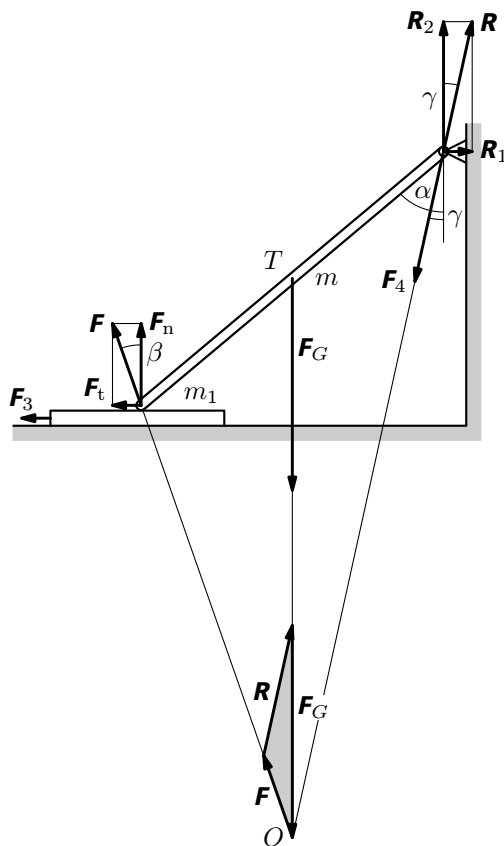
- c) Při posouvání musíme navíc překonávat sílu tření mezi deskou a vodorovnou rovinou, takže

$$F'_1 = F_1 + f_1(m_1g + F_n) = 33,2 \text{ N} \quad \text{při posouvání ke stěně,}$$

$$F'_3 = F_3 + f_1(m_1g + F_n) = 19,0 \text{ N} \quad \text{při posouvání od stěny.}$$

Síla, kterou působí tyč na kloub, se nezmění.

**2 body**



Obr. R5

3.a) Nejprve užitím stavové rovnice určíme teploty:

$$T_2 = T_3 = 3T_1, \quad T_4 = 2T_1.$$

**1 bod**

Děj 1-2 je izochorické ohřátí. Práce je nulová, musíme dodat teplo

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = 5nRT_1 = 12,47 \text{ kJ.}$$

Děj 2-3 je izotermická expanze. Dodané teplo se rovná vykonané práci:

$$Q_{23} = W'_{23} = 3nRT_1 \ln 2 = 5,19 \text{ kJ.}$$

Děj 3-4 je izochorické ochlazení. Práce je nulová. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{34} = U_3 - U_4 = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_4) = \frac{5}{2}nRT_1 = 6,24 \text{ kJ.}$$

Děj 4-1 je izobarické ochlazení. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{41} = \frac{7}{2}nR(T_4 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1 = 8,73 \text{ kJ}$$

a spotřebuje práci

$$W_{41} = p_1(V_4 - V_1) = nR(T_4 - T_1) = nRT_1 = 2,49 \text{ kJ.}$$

**3 body**

Účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W'_{23} - W_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{3nRT_1 \ln 2 - nRT_1}{5nRT_1 + 3nRT_1 \ln 2} = \frac{3 \ln 2 - 1}{5 + 3 \ln 2} = 15,2 \text{ \%}.$$

**1 bod**

b) Určíme teploty:

$$T_2 = 3T_1, \quad T_4 = 2T_1, \quad T_3(2V_1)^{\kappa-1} = T_2V_1^{\kappa-1} \Rightarrow T_3 = \frac{3T_1}{2^{\kappa-1}}.$$

**1 bod**

Děj 1-2 je izochorické ohřátí. Práce je nulová, musíme dodat teplo

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = 5nRT_1 = 12,47 \text{ kJ.}$$

Děj 2-3 je adiabatická expanze. Teplo je nulové, vykonaná práce je rovna úbytku vnitřní energie:

$$W'_{23} = U_2 - U_3 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_3) = \frac{5}{2}nRT_1 \left( 3 - \frac{3}{2^{\kappa-1}} \right) = 4,53 \text{ kJ.}$$

Děj 3-4 je izochorické ochlazení. Práce je nulová. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{34} = U_3 - U_4 = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_4) = \frac{5}{2}nRT_1 \left( \frac{3}{2^{\kappa-1}} - 2 \right) = 1,71 \text{ kJ.}$$

Děj 4-1 je izobarické ochlazení. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{41} = \frac{7}{2}nR(T_4 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1 = 8,73 \text{ kJ}$$

a spotřebuje práci

$$W_{41} = p_1(V_4 - V_1) = nR(T_4 - T_1) = nRT_1 = 2,49 \text{ kJ.}$$

**3 body**

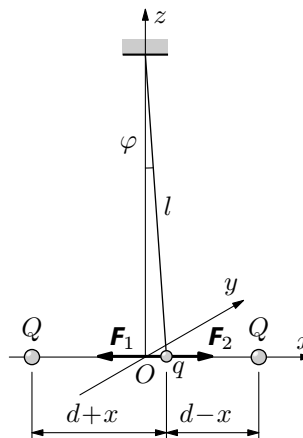
Účinnost cyklu je

$$\begin{aligned} \eta = \frac{W'_{23} - W_{41}}{Q_{12}} &= \frac{\frac{5}{2}nRT_1 \left( 3 - \frac{3}{2^{\kappa-1}} \right) - nRT_1}{5nRT_1} = \\ &= \frac{\frac{5}{2} \left( 3 - \frac{3}{2^{\kappa-1}} \right) - 1}{5} = 16,3 \%. \end{aligned}$$

**1 bod**

- 4.a) Zvolme souřadnicovou soustavu podle obr. R6. Na zavěšenou kuličku působí odpuzivé elektrické síly  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  od pevných kuliček a síla tíhová  $\mathbf{F}_G$ . Vychýlíme-li zavěšenou kuličku nepatrně ve směru osy  $x$ , působí síly  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  prakticky vodorovným směrem a pro souřadnici výsledné elektrické síly platí

$$F_e \approx \frac{kQq}{(d+x)^2} - \frac{kQq}{(d-x)^2} = \frac{kQq}{d^2 \left(1 + \frac{x}{d}\right)^2} - \frac{kQq}{d^2 \left(1 - \frac{x}{d}\right)^2} \approx \frac{kQq}{d^2} \left[ 1 - 2\frac{x}{d} - \left(1 + 2\frac{x}{d}\right) \right] = -\frac{4kQq}{d^3}x.$$



Obr. R6

Výsledná elektrická síla tedy směřuje zpět do rovnovážné polohy zavěšené kuličky. Totéž platí o pohybové složce tíhové síly, jejíž velikost je  $\frac{mg}{l}x$ . Ve směru osy  $x$  je tedy rovnovážná poloha zavěšené kuličky stabilní. Celková síla působící na zavěšenou kuličku má  $x$ -ovou souřadnici

$$F_x = -\left(\frac{4kQq}{d^3} + \frac{mg}{l}\right)x. \quad (11)$$

Ostatní souřadnice celkové síly jsou prakticky nulové.

**3 body**

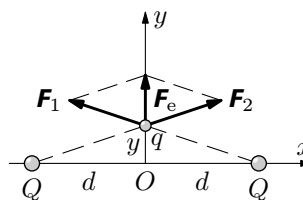
Vychýlíme-li kuličku nepatrně ve směru osy  $y$ , pak podle obr. R7 (pohled shora) pro souřadnici výsledné elektrické síly platí

$$F_e = 2 \frac{kQq}{(d^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{d} \approx \frac{2kQq}{d^3}y.$$

Proti elektrické síle působí pohybová složka tíhové síly, která směřuje do rovnovážné polohy. Celková síla působící na kuličku má  $y$ -ovou souřadnici

$$F_y \approx -\left(\frac{mg}{l} - \frac{2kQq}{d^3}\right)y. \quad (12)$$

Ostatní souřadnice celkové síly jsou opět prakticky nulové.



Obr. R7



Má-li být rovnovážná poloha zavěšené kuličky stabilní i ve směru osy  $y$ , musí platit

$$\frac{F_y}{y} < 0 \quad \Rightarrow \quad m > \frac{2kQql}{gd^3}.$$

Pro dané hodnoty vychází  $m > 2,55$  mg, což je splněno.

**3 body**

- b) V obou případech je celková síla působící na zavěšenou kuličku přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy a má opačný směr, jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonických kmitů. Ve směru osy  $x$  je úhlová frekvence

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \text{kde podle (11) je } K = \left( \frac{4kQq}{d^3} + \frac{mg}{l} \right).$$

Kyvadélko kývá s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{md^3} + \frac{g}{l}}} = 0,69 \text{ s.}$$

Ve směru osy  $y$  je úhlová frekvence

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{m}}, \quad \text{kde podle (12) je } L = \left( \frac{mg}{l} - \frac{2kQq}{d^3} \right).$$

Kyvadélko kývá s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{2kQq}{md^3}}} = 0,83 \text{ s.}$$

**4 body**

5.a) V sériovém obvodu protéká oběma žárovkami proud  $I_1 = \frac{U_e}{R_i + 2R}$ .

V paralelním obvodu je celkový proud zdroje  $I = \frac{U_e}{R_i + 0,5R}$  a každou žárovkou protéká proud

$$I_2 = \frac{U_e}{2(R_i + 0,5R)} = \frac{U_e}{2R_i + R}.$$

Protože žárovky svítí v obou případech stejně, je  $I_1 = I_2$ . Proto

$$R_i + 2R = 2R_i + R \quad \Rightarrow \quad R = R_i.$$

**3 body**

b) V sériovém zapojení je účinnost obvodu  $\eta = \frac{2R}{2R + R_i} = \frac{2}{3} \approx 67\%$ . V paralelním zapojení je účinnost obvodu  $\eta = \frac{0,5R}{0,5R + R_i} = \frac{1}{3} \approx 33\%$ , tedy poloviční.

**2 body**

c) Úlohu c) vyřešíme graficky. V sériovém obvodu se dvěma žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí  $U_e - 2U_{\bar{z}}$  a žárovkami prochází proud

$$I_s = \frac{U_e - 2U_{\bar{z}}}{R_i}. \quad (13)$$

V paralelním obvodu se dvěma žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí  $U_e - U_{\bar{z}}$  a žárovkami prochází proud

$$I_p = \frac{U_e - U_{\bar{z}}}{2R_i}. \quad (14)$$

Rovnice (13) a (14) vyjadřují proud žárovkou jako funkce napětí, které jsou na obr. R8 zobrazeny úsečkami  $s_1$  a  $p_1$ . Podle zadání úlohy musí obě rovnice platit současně, proto průsečík obou grafů – bod  $A$  o souřadnicích  $U_{\bar{z}} = U_e/3$ ,  $I_{\bar{z}} = U_e/(3R_i)$  – leží na voltampérové charakteristice žárovky popsané funkcí  $I_{\bar{z}} = f(U_{\bar{z}})$ . V sériovém obvodu se třemi žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí  $U_e - 3U_{\bar{z}}$  a žárovkami prochází proud

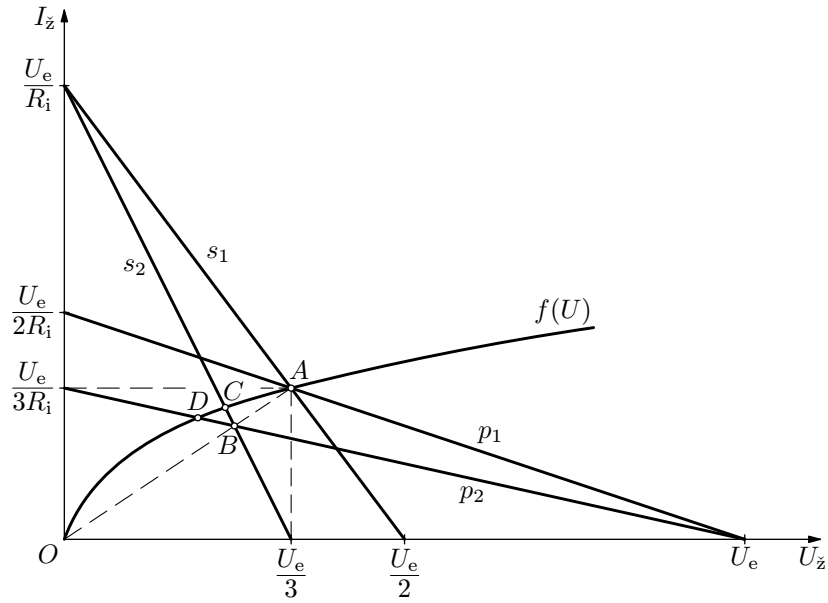
$$I_s = \frac{U_e - 3U_{\bar{z}}}{R_i}. \quad (15)$$

V paralelním obvodu se třemi žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí  $U_e - U_{\bar{z}}$  a žárovkami prochází proud

$$I_p = \frac{U_e - U_{\bar{z}}}{3R_i}. \quad (16)$$

Funkce popsané rovnicemi (15) a (16) jsou na obr. R8 znázorněny úsečkami  $s_2$  a  $p_2$ , které se protínají v bodě  $B$  ležícím uvnitř úsečky  $OA$ . Jejich průsečíky  $C$  a  $D$  s voltampérovou charakteristikou určují hodnoty napětí na žárovkách a proudu procházejícího žárovkami v obou případech. Je zřejmé, že v sériovém zapojení (bod  $C$ ) budou žárovky svítit více než v zapojení paralelním (bod  $D$ ).

5 bodů



Obr. R8

## 6. Odvození teoretických vztahů

Sjednotíme znaménkovou konvenci pro zobrazení zrcadlem a pro zobrazení čočkou. Oba poloměry kulových ploch budeme brát jako kladné veličiny. Optická mohutnost čočky pak je

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Optická mohutnost prvního rozhraní ve funkci zrcadla je

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2}{r_1}$$

a optická mohutnost druhého rozhraní jako zrcadla doplněného dvojím průchodem paprsků čočkou je

$$\varphi_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{r_2} + 2\varphi = \frac{2}{r_2} + \frac{2}{f}.$$

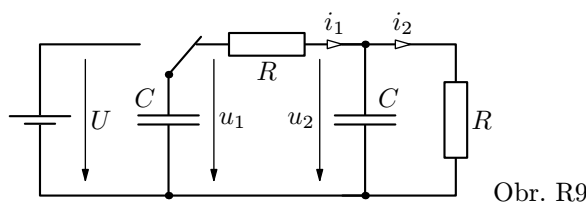
Řešením této soustavy rovnic dojdeme ke vztahům

$$r_1 = 2f_1, \quad r_2 = \frac{2f_2f}{f - 2f_2}, \quad n = \frac{f(f_1 - f_2)}{f(f_1 - f_2) - 2f_1f_2}.$$

7. Označme  $i_1, i_2$  okamžité hodnoty proudů, které procházely rezistory (obr. R9). Okamžité hodnoty nábojů na kondenzátorech označme  $q_1, q_2$ . Platí

$$dq_1 = C \cdot du_1 = -i_1 dt = -\frac{u_1 - u_2}{R} dt,$$

$$dq_2 = C \cdot du_2 = (i_1 - i_2) dt = \left( \frac{u_1 - u_2}{R} - \frac{u_2}{R} \right) dt = \frac{u_1 - 2u_2}{R} dt.$$

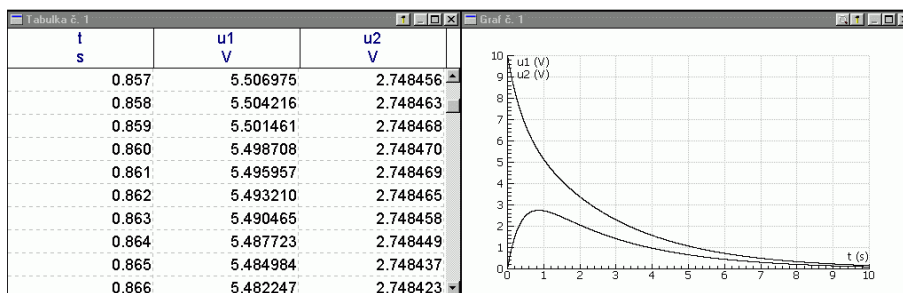
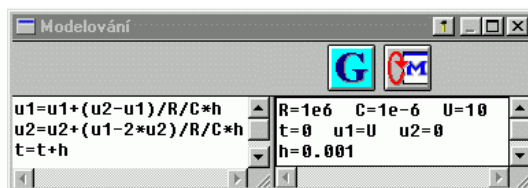


Úpravou dostaneme vztahy

$$du_1 = \frac{u_2 - u_1}{RC} dt, \quad du_2 = \frac{u_1 - 2u_2}{RC} dt,$$

ze kterých můžeme vycházet při modelování děje Eulerovou metodou:

**5 bodů**



Z tabulky a grafu vyčteme, že napětí  $u_2$  dosáhlo maximální hodnoty 2,75 V v čase  $t = 0,86$  s.

**5 bodů**

*Poznámka:* Analytickým řešením úlohy bychom dospěli k obecnému řešení

$$u_1 = U \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}t} + U \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}t}, \quad (1)$$

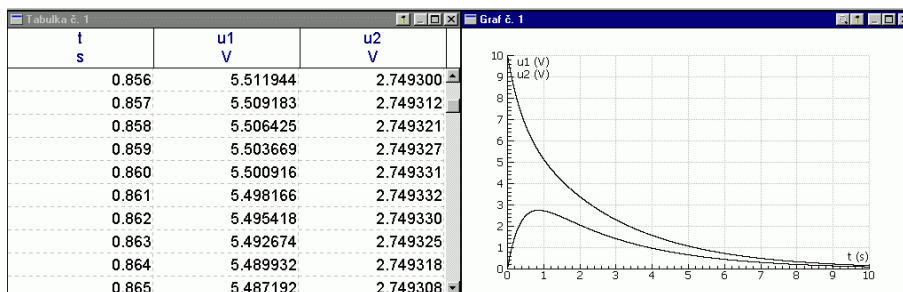
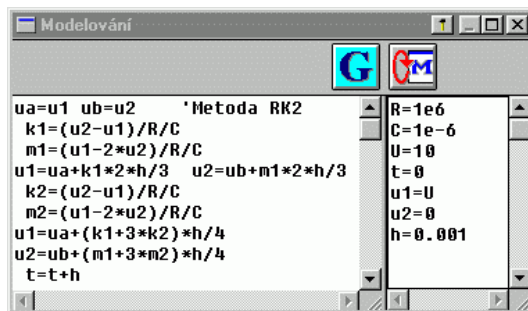
$$u_2 = \frac{U}{\sqrt{5}} \left( e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}t} - e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}t} \right). \quad (2)$$

Napětí  $u_2$  dosáhlo maxima v čase

$$t = \frac{RC}{\sqrt{5}} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \approx 0,8608RC.$$

Pro dané hodnoty je  $t = 0,8608$  s. Dosazení do (2) dostaneme  $u_{2\max} \approx 2,7493$  V.

Vidíme, že výsledek získaný Eulerovou metodou při časovém kroku 0,001 s se shoduje s přesným řešením na 3 platné číslice. Přesnější model získáme Rungovou–Kuttovou metodou 2. řádu:



Vzhledem k malé přesnosti zadaných hodnot však dobře vyhovuje i výsledek získaný Eulerovou metodou.