

Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: I. Volf (1), J. Jírů (2) a P. Šedivý (3, 4)

- 1.a) Protože gravitační síla je silou dostředivou

$$\frac{\varkappa Mm}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

platí

$$r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}} = 8\,070 \text{ km}.$$

Nad severním pólem stanice prolétá ve výšce $8\,070 \text{ km} - 6\,357 \text{ km} = 1\,713 \text{ km}$.

3 body

- b) V soustavě spojené se zemskou osou a orientované ke hvězdám se stanice pohybuje rychlostí

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 7,04 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 bod

- c) Stanice proletí nad rovníkem poprvé v čase $t_1 = \frac{T}{4} = 1\,800 \text{ s}$. Země se mezitím otočí o úhel

$$\varphi_1 = \frac{t_1}{T_0} \cdot 360^\circ = 7,52^\circ,$$

kde $T_0 = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$. V tomto okamžiku se tedy bude stanice nacházet na $7^\circ 31'$ západní délky.

Podruhé proletí stanice nad rovníkem v čase $t_2 = \frac{3T}{4} = 5\,400 \text{ s}$. Tomu odpovídá úhel otočení

$$\varphi_2 = \frac{t_2}{T_0} \cdot 360^\circ = 22,56^\circ,$$

V tomto okamžiku se tedy bude stanice nacházet na $157^\circ 26'$ východní délky.

2 body

- d) Kosmonaut může v určitém okamžiku pozorovat vrchlík, jehož výšku určíme podle obr. R1. Platí

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R-h}{R} \quad \Rightarrow \quad h = R \left(1 - \frac{R}{r} \right).$$

Obsah vrchlíku a povrch Země jsou v poměru

$$\frac{2\pi R h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R} = \frac{1 - \frac{R}{r}}{2} = 0,105.$$

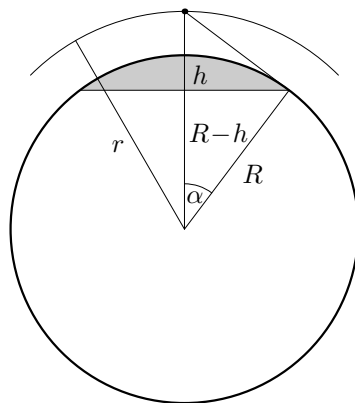
V určitém okamžiku můžeme tedy ze stanice přehlédnout 10,5 % zemského povrchu.

2 body

Největší vzdálenost s dvou bodů, které můžeme současně pozorovat, je rovna délce oblouku o poloměru R a středovém úhlu $2\alpha = 2 \cdot 37,876^\circ = 1,32$ rad:

$$s = R \cdot 2\alpha = 8\,420 \text{ km}.$$

2 body



Obr. R1

- 2.a) Při volbě směrů proudů podle obrázku sestavíme rovnice na základě Kirchhoffových zákonů:

$$\begin{aligned} U_e &= R_i I_1 + RI, \\ 2U_e &= 2R_i I_2 + RI, \\ I_1 + I_2 &= I. \end{aligned}$$

Z rovnic plyne

$$I = \frac{4U_e}{2R_i + 3R}.$$

Napětí na rezistoru o odporu R pak je

$$U = RI = \frac{4RU_e}{2R_i + 3R}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Z rovnic dále plyne

$$I_1 = \frac{2R_i - R}{R_i(2R_i + 3R)} U_e, \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{2R_i + R}{R_i(2R_i + 3R)} U_e. \quad (2)$$

Podmínka je splněna pro kladné hodnoty proudů. Tedy $I_1 > 0$, pro $R < 2R_i$, $I_2 > 0$ platí pro libovolný odpor R . Kladný proud I_2 lze zdůvodnit i tím, že v této větvi je největší elektromotorické napětí.

2 body

- c) Příkon rezistoru je

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} = \frac{16R}{(2R_i + 3R)^2} U_e^2. \quad (3)$$

Provedeme derivaci příkonu P podle odporu R :

$$\frac{dP}{dR} = 16U_e^2 \frac{2R_i - 3R}{(2R_i + 3R)^3}.$$

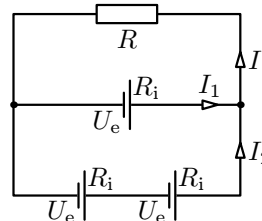
Z podmínky $\frac{dP}{dR} = 0$ plyne, že hledaný odpor je $R' = \frac{2}{3}R_i$. (Je roven vnitřnímu odporu zdroje jako celku.) Provedeme druhou derivaci:

$$\frac{d^2P}{dR^2} = 16U_e^2 \frac{-24R_i + 18R}{(2R_i + 3R)^4}.$$

Pro $R = R' = 2/3R_i$ je

$$\frac{d^2P}{dR^2} = 16U_e^2 \frac{-12R_i}{(4R_i)^4} < 0,$$

tedy jedná se o maximum.



Obr. R2

(Místo druhé derivace lze uvážit, že vzorec (3) představuje podíl přímé úměrnosti a kvadratické funkce, kde vzhledem ke kladným hodnotám odporů je jmenovatel nenulový a tudíž funkce je spojitá na intervalu od nuly do nekonečna. Funkční hodnota v nule je nulová stejně jako limita v nekonečnu a funkce na uvedeném intervalu nabývá nezáporných hodnot. Proto jediný nalezený extrém pomocí první derivace musí být maximum.)

Dosazením do rovnice (3) za proměnnou R dostaneme $P_{\max} = \frac{2U_e^2}{3R_i}$.

3 body

- d) Celkový elektrický příkon zapojení je $P_0 = U_e I_1 + 2U_e I_2$. Dosazením z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$P_0 = \frac{6R_i + R}{R_i(2R_i + 3R)} U_e^2.$$

Účinnost zapojení je

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{16R_i R}{(2R_i + 3R)(6R_i + R)} = \frac{16R_i R}{3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2}. \quad (4)$$

Provedeme derivaci účinnosti η podle odporu R :

$$\frac{d\eta}{dR} = 48R_i \frac{4R_i^2 - R^2}{(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^2}.$$

Z podmínky $\frac{d\eta}{dR} = 0$ plyne, že hledaný odpor je $R'' = 2R_i$. (mimořádně též $I_1 = 0$). Provedeme druhou derivaci:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dR^2} &= \\ &= 48R_i \frac{-2R(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^2 - 2(4R_i^2 - R^2)(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)(6R + 20R_i)}{(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^4} = \\ &= 48R_i \frac{6R^3 - 72R_i^2 R - 160R_i^3}{(3R^2 + 20R_i R + 12R_i^2)^3}. \end{aligned}$$

Pro $R = R'' = 2R_i$ je

$$\frac{d^2\eta}{dR^2} = 48R_i \frac{-256R_i^3}{(64R_i^2)^3} < 0,$$

jedná se tedy o maximum.

(Místo druhé derivace lze uvážit, že vzorec (4) představuje stejně jako vzorec (3) podíl přímé úměrnosti a kvadratické funkce. Další zdůvodnění je pak stejné jako v úloze c.) Dosazením do rovnice (4) za proměnnou R dostaneme

$$\eta = \frac{1}{2}.$$

3 body

- 3.a) Nejprve určíme poloměr R kulové plochy čočky. Z Eukleidovy věty o výšce plyne

$$\varrho^2 = (2R - d)d \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\varrho^2 + d^2}{2d} = 170 \text{ mm}.$$

Paprsek přicházející ve vzdálenosti $m \ll R$ od optické osy protíná optickou osu po průchodu čočkou ve vzdálenosti f od čočky (obr. R3). Podle zákona lomu

$$n = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \approx \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \approx \frac{\frac{m}{R} + \frac{m}{f}}{\frac{m}{R}} = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{f}}{\frac{1}{R}}.$$

Z toho

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{f} = n \frac{1}{R}, \quad f = \frac{R}{n-1} = 327 \text{ mm}.$$

V bodě F ve vzdálenosti f od čočky se na optické ose protnou všechny paprsky dopadající na čočku v malé vzdálenosti od optické osy. Sem tedy umístíme stínítko.

6 bodů

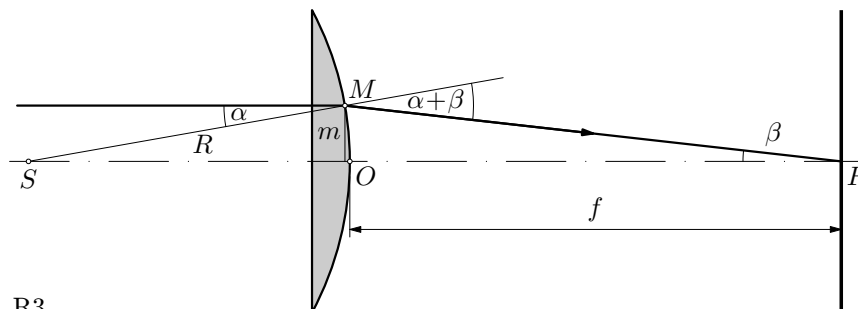
- b) Po odstranění clony krajní paprsky protínají stínítko ve vzdálenosti ϱ_1 od bodu F (obr. R4). Platí

$$\gamma = \arcsin \frac{\varrho}{R}, \quad \gamma = 28,1^\circ,$$

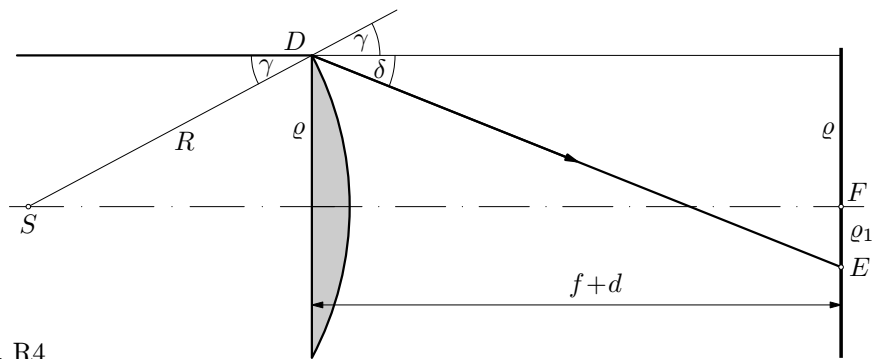
$$\sin(\gamma + \delta) = n \sin \gamma = \frac{n\varrho}{R} \quad \delta = \arcsin \frac{n\varrho}{R} - \gamma = 17,6^\circ.$$

$$\varrho_1 = (d + f) \operatorname{tg} \delta - \varrho = 30,0 \text{ mm}.$$

4 body



Obr. R3



Obr. R4

4. Účinnost η kruhového děje je definována jako poměr celkové práce W' plynu během jednoho cyklu a celkového tepla Q přijatého plynem během jednoho cyklu od ohříváče.

$$\eta = \frac{W'}{Q}.$$

Práce W' je určena obsahem obrazce omezeného grafem. V obou případech má stejnou velikost $W' = 2p_1V_1$. Poměr účinností obou cyklů je tedy

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1},$$

2 body

kde Q_1 je celkové teplo přijaté plynem v jednom cyklu prvního děje a Q_2 v jednom cyklu druhého děje. Celkové teplo přijaté během prvního cyklu je součtem tepla přijatého při izochorickém ohřátí $1 \rightarrow 2$ a tepla přijatého při izobarické expanzi $2 \rightarrow 3$. U druhého cyklu je součtem tepla přijatého při izochorickém ohřátí $1 \rightarrow 5$ a tepla přijatého při izobarické expanzi (resp. $5 \rightarrow 6$).

Označme T_1 teplotu plynu ve stavu 1, tedy při tlaku p_1 a objemu V_1 . Ze stavové rovnice plyne

$$T_2 = T_7 = 2T_1, \quad T_5 = T_4 = 3T_1, \quad T_6 = T_3 = 6T_1.$$

2 body

Teplo přijaté plynem při izochorickém ohřátí je rovno přírůstku vnitřní energie. Teplo přijaté při izobarické expanzi je rovno součtu přírůstku vnitřní energie a vykonané práce. Proto

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_{12} + Q_{23} &= \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2) + 2p_1 \cdot 2V_1 = \\ &= \frac{5}{2}nRT_1 + 10nRT_1 + 4nRT_1 = \frac{33}{2}nRT_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = Q_{15} + Q_{56} &= \frac{5}{2}nR(T_5 - T_1) + \frac{5}{2}nR(T_6 - T_5) + 3p_1 \cdot V_1 = \\ &= 5nRT_1 + \frac{15}{2}nRT_1 + 3nRT_1 = \frac{31}{2}nRT_1. \end{aligned}$$

5 bodů

Poměr účinností obou kruhových dějů je

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{31}{33}.$$

1 bod