

**Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A**

Autoři úloh: L. Richterek (1, 7), P. Šedivý (3, 4, 6), M. Jarešová (2), J. Jírů (5)  
Konečná úprava P. Šedivý

1. a) Na obr. R1 je  $M$  poloha mravence v čase  $t$ :  $Z$  podobnosti trojúhelníků  $MNB$  a  $AOB$  plyne

$$\frac{|NB|}{|MB|} = \frac{|OB|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{vt - x}{ut} = \frac{vt}{L} \Rightarrow x = vt - \frac{uv}{L}t^2.$$

Dostali jsme kvadratickou funkci v proměnné  $t$  se záporným koeficientem u kvadratického členu, která je rovna nule pro  $t = 0$  a pro  $t = L/u$ . V čase  $t = t_1 = \frac{L}{2u}$  tedy dosáhne maxima

$$x_{\max} = v \frac{L}{2u} - \frac{uv}{L} \cdot \frac{L^2}{4u^2} = L \frac{v}{4u}.$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud  $t_1 \leq L/v$ . Jestliže  $t_1 > L/v$ , tj.  $u < v/2$ , vzdaluje se mravenec od stěny po celou dobu pohybu tyče a v čase  $t = L/v$  dosáhne maximální vzdálenosti od stěny

$$x_{\max} = v \frac{L}{v} - \frac{uv}{L} \cdot \frac{L^2}{v^2} = L \left(1 - \frac{u}{v}\right).$$

**3 body**

- b) Z podobnosti trojúhelníků  $MNB$  a  $AOB$  dále plyne

$$\frac{|MN|}{|MB|} = \frac{|AO|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{y}{ut} = \frac{\sqrt{L^2 - v^2t^2}}{L} \Rightarrow y = \frac{ut}{L} \sqrt{L^2 - v^2t^2}.$$

Dostali jsme funkci, která je v čase  $t = 0$  a v čase  $t = L/v$  nulová. V intervalu  $(0, L/v)$  je spojitá a kladná. Maxima dosahuje, když

$$\frac{dy}{dt} = \frac{u}{L} \cdot \frac{L^2 - 2v^2t^2}{\sqrt{L^2 - v^2t^2}} = 0,$$

tj. v čase  $t = t_2 = \frac{L}{v\sqrt{2}}$ . Maximum má hodnotu

$$y_{\max} = \frac{uL}{Lv\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - v^2 \frac{L^2}{2v^2}} = L \frac{u}{2v}.$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud  $t_2 \leq L/u$ , tj.  $u \leq v\sqrt{2}$ . Jestliže  $u > v\sqrt{2}$ , stoupá mravenec po celou dobu lezení a na konci tyče dosáhne výšky

$$y_{\max} = \frac{uL}{uL} \sqrt{L^2 - v^2 \frac{L^2}{u^2}} = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}.$$

**3 body**

c) Pro vzdálenost mravence od podlahové lišty platí  $r^2 = x^2 + y^2$ , tj.

$$r^2 = \left( vt - \frac{uv}{L}t^2 \right)^2 + \left( \frac{ut}{L} \sqrt{L^2 - v^2t^2} \right)^2 = t^2(u^2 + v^2) - \frac{2uv^2}{L}t^3, \quad (1)$$

přičemž  $t \leq L/u \wedge t \leq L/v$ . Dostali jsme kubickou funkci, jejíž extrém vyšetříme pomocí jejich derivací:

$$\frac{d(r^2)}{dt} = 2(u^2 + v^2)t - \frac{6uv^2t^2}{L}, \quad \frac{d^2(r^2)}{dt^2} = 2(u^2 + v^2) - \frac{12uv^2t}{L}.$$

První derivace funkce (1) je rovna nule pro  $t = 0$  a pro  $t = \frac{L(u^2 + v^2)}{3uv^2}$ . Druhá derivace je pro  $t < \frac{L(u^2 + v^2)}{6uv^2}$  kladná, pro  $t > \frac{L(u^2 + v^2)}{6uv^2}$  záporná. Funkce (1) tedy dosahuje pro  $t = 0$  lokálního minima a pro  $t = t_3 = \frac{L(u^2 + v^2)}{3uv^2}$  lokálního maxima

$$(r_{\max})^2 = L^2 \frac{(u^2 + v^2)^3}{27u^2v^4}, \quad \text{tedy} \quad r_{\max} = L \frac{u^2 + v^2}{3uv^2} \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{3}}. \quad (2)$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud  $t_3 < L/v$ , tj.

$$u^2 + v^2 - 3uv < 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{u}{v} \right)^2 - 3 \frac{u}{v} + 1 < 0,$$

$$0,382 \doteq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{u}{v} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \doteq 2,62.$$

Současně musí platit  $t_3 < L/u$ , tj.

$$u^2 + v^2 < 3v^2, \quad \Rightarrow \quad u < v\sqrt{2} \doteq 1,41v.$$

Platnost výsledku (2) je tedy omezena podmínkou

$$v \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < u < v\sqrt{2}.$$

Pro  $u < v \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  leze mravenec pomalu, jeho vzdálenost od lišty se během pohybu tyče stále zvětšuje a v čase  $t = L/v$  dosáhne maxima

$$r_{\max}^2 = (u^2 + v^2) \frac{L^2}{v^2} - \frac{2uv^2L^3}{v^3L} = L^2 \left( 1 - \frac{u}{v} \right)^2, \quad r_{\max} = L \left( 1 - \frac{u}{v} \right) = x_{\max}.$$

Pro  $u > v\sqrt{2}$  leze mravenec rychle, jeho vzdálenost od lišty se během jeho pohybu po tyči stále zvětšuje a v čase  $t = L/u$  dosáhne maxima

$$r_{\max}^2 = (u^2 + v^2) \frac{L^2}{u^2} - \frac{2uv^2L^3}{u^3L} = L^2 \left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right), \quad r_{\max} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = y_{\max}.$$

**4 body**

*Alternativní řešení úlohy b)*

Vydeme z obr. R2: Z podobnosti trojúhelníků  $MNB$  a  $OPB$  plyne

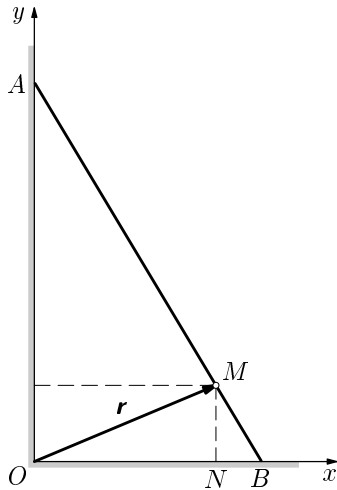
$$\frac{|MN|}{|MB|} = \frac{|OP|}{|OB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{y}{ut} = \frac{H}{vt} \Rightarrow y = H \frac{u}{v},$$

kde  $H$  je vzdálenost tyče od podlahové lišty. V rovnoramenném trojúhelníku  $OSB$  ( $S$  je střed tyče) je  $H$  výškou na rameno. Maximální velikost  $H_{\max} = L/2$  má v okamžiku, kdy je tyč skloněna o  $45^\circ$  a trojúhelník  $OSB$  je pravoúhlý. V tomto okamžiku je

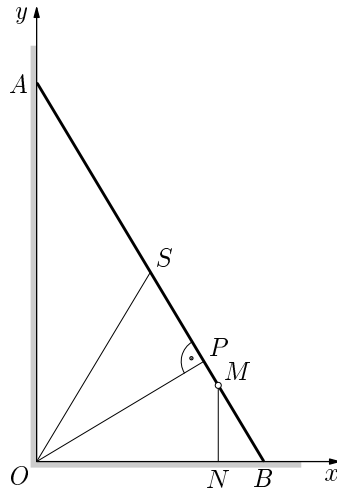
$$y = y_{\max} = H_{\max} \frac{u}{v} = L \frac{u}{2v}.$$

Popsaná situace musí ovšem nastat nejpozději v okamžiku, kdy mravenec doleze na konec tyče, tj.  $L/u \geq L/(v\sqrt{2})$ ,  $u \leq v\sqrt{2}$ . V opačném případě bude mravenec nejvýše v okamžiku, kdy dorazí na konec tyče a

$$y_{\max} = \sqrt{L^2 - v \left(\frac{L}{u}\right)^2} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}.$$



Obr. R1



Obr. R2

2. a) Počátek vztahné soustavy zvolíme na vrcholu pyramidy, osu  $x$  kolmo k podstavné hraně, kladnou poloosu  $y$  svisle vzhůru. Jedná se o vrh šikmý vzhůru s počáteční rychlostí  $v_0$  a elevačním úhlem  $\alpha$ . Platí:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Po vyloučení  $t$  a úpravě pomocí vztahu  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$  dostaneme

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = -\frac{g x^2}{2 v_0^2} + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Souřadnice bodu dopadu na pobočné stěně splňují podmínku  $y = -x \operatorname{tg} \beta$ , kde  $\beta$  je úhel sklonu pobočné stěny pyramidy,  $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}$ . Dosazením do (1) a úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{g x^2}{2 v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{g x^2}{2 v_0^2} - x \operatorname{tg} \beta = 0. \quad (2)$$

**2 body**

Z této kvadratické rovnice pro  $\operatorname{tg} \alpha$  můžeme vypočítat ke zvolené souřadnici  $x$  bodu dopadu příslušný elevační úhel vrhu.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x \pm \sqrt{D}}{\frac{g x^2}{v_0^2}}, \quad D = x^2 - \frac{g^2 x^4}{v_0^4} + \frac{2 g x^3 \operatorname{tg} \beta}{v_0^2}. \quad (3)$$

Pro nejvzdálenější bod dopadu má rovnice jediné řešení a diskriminant rovnice je roven nule:

$$D = x^2 \left( 1 - \frac{g^2 x^2}{v_0^4} + \frac{2 g x \operatorname{tg} \beta}{v_0^2} \right) = 0, \quad \text{přičemž } x \neq 0,$$

$$x = \frac{\frac{2 g \operatorname{tg} \beta}{v_0^2} \pm \sqrt{\frac{4 g^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{v_0^4} + \frac{4 g^2}{v_0^4}}}{\frac{2 g^2}{v_0^4}} = \frac{v_0^2}{g} (\operatorname{tg} \beta \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}).$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$x = \frac{v_0^2}{g} (\operatorname{tg} \beta + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}) = \frac{v_0^2}{g} (\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 72,2 \text{ m}. \quad (4)$$

Přitom podle (3)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x + 0}{\frac{g x^2}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g x} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,31784, \quad \alpha = 17,6^\circ. \quad (5)$$

Při dané velikosti počáteční rychlosti můžeme dohodit nejdál do vzdálenosti  $x / \cos \beta = x \sqrt{3} = 125 \text{ m}$  od vrcholu pyramidy, zvolíme-li elevační úhel  $17,6^\circ$ .

**3 body**

- b) Střed podstavné hrany pyramidy má souřadnici  $x = h/\sqrt{2}$ . Výsledek (5) nezávisí na velikosti počáteční rychlosti. Proto i střed podstavné hrany zasáhne s nejmenší počáteční rychlostí vrhu při elevačním úhlu určeném v úkolu a). Podle (4) pak

$$\frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{v_{0\min}^2}{g}(\sqrt{2} + \sqrt{3}), \quad v_{0\min}^2 = \frac{gh}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = gh \left( \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right),$$

$$v_{0\min} = \sqrt{gh \left( \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right)} = 18,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**2 body**

- c) Vztahnou soustavu změníme tak, že osa  $x$  bude mít směr úhlopříčky podstavy. Dosadíme-li do rovnice (1) souřadnice bodu dopadu  $[h, -h]$ , dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici pro  $\text{tg } \alpha$  s parametrem  $v_0$

$$\frac{gh^2}{2v_0^2} \text{tg}^2 \alpha - h \text{tg } \alpha + \frac{gh^2}{2v_0^2} - h = h \left( \frac{gh}{2v_0^2} \text{tg}^2 \alpha - \text{tg } \alpha + \frac{gh}{2v_0^2} - 1 \right) = 0,$$

Z toho  $\text{tg } \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{\frac{gh}{v_0^2}}$ ,  $D = 1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \frac{g^2 h^2}{v_0^4}$ . Minimální velikost rychlosti

je taková, pro kterou má rovnice jediné řešení, tj.

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0^4 + 2ghv_0^2 - g^2 h^2 = 0,$$

$$v_0^2 = \frac{-2gh \pm \sqrt{4g^2 h^2 + 4g^2 h^2}}{2} = gh(-1 \pm \sqrt{2}).$$

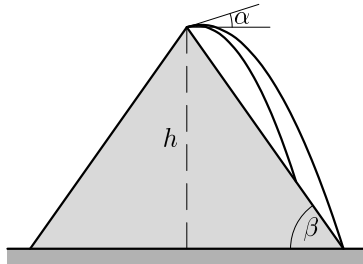
Úloze vyhovuje kořen

$$v_{0\min}^2 = gh(\sqrt{2} - 1), \quad v_{0\min} = \sqrt{gh(\sqrt{2} - 1)} = 24,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

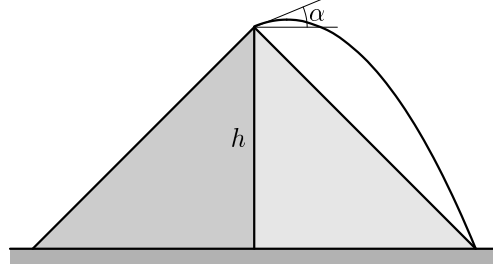
Pak  $\text{tg } \alpha = \frac{1+0}{\frac{gh}{v_{0\min}^2}} = \frac{v_{0\min}^2}{gh} = \sqrt{2} - 1$ ,  $\alpha = 22,5^\circ$ .

**3 body**

Trajektorie vrhů, které jsou řešením úlohy, jsou v měřítku 1:5000 nakresleny na obr. R3 a R4.



Obr. R3



Obr. R4

Alternativní řešení úkolů a) a c) užitím diferenciálního počtu

a) Rovnici (2) upravíme na tvar:

$$x^2 \frac{g(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2v_0^2} - x(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = x \left( x \frac{g(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2v_0^2} - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \right) = 0.$$

Kořen  $x = 0$  je souřadnice počátku vrhu, bod dopadu má souřadnici

$$x = \frac{2v_0^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{g(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (6)$$

Provedením substituce  $\operatorname{tg} \alpha = z$  dostaneme vztah

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{z + \operatorname{tg} \beta}{1 + z^2}, \quad (7)$$

který zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1 + z^2 - (z + \operatorname{tg} \beta)2z}{(1 + z^2)^2} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1 - 2z \operatorname{tg} \beta - z^2}{(1 + z^2)^2} = 0. \quad (8)$$

Z toho

$$z^2 + 2z \operatorname{tg} \beta - 1 = 0, \quad z = \frac{-2 \operatorname{tg} \beta \pm \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \beta + 4}}{2} = -\operatorname{tg} \beta \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}.$$

Úloze vyhovuje kořen  $z_1 = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ . Druhý kořen  $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$  nevyhovuje rovnici (6), neboť výraz na pravé straně by byl záporný. Funkce (7) je kladná v intervalu  $(-\operatorname{tg} \beta, \infty)$ . V bodě  $-\operatorname{tg} \beta$  je rovna nule a také limita pro  $z \rightarrow \infty$  je rovna 0. Proto v bodě  $z_1$  dosahuje maxima. Podle (6)

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{6}} = \frac{v_0^2}{g}(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

c) Do rovnice (1) dosadíme souřadnice bodu dopadu  $[h, -h]$  a dostaneme rovnici

$$-h = h \operatorname{tg} \alpha - \frac{gh^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad (9)$$

ze které vyjádříme  $v_0^2$  jako funkci  $\operatorname{tg} \alpha$ . Provedeme substituci  $\operatorname{tg} \alpha = z$ , výraz zderivujeme podle  $z$  a derivaci položíme rovnu nule:

$$v_0^2 = \frac{gh}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{gh}{2} \cdot \frac{1 + z^2}{1 + z}, \quad (10)$$

$$\frac{d(v_0^2)}{dz} = \frac{gh}{2} \cdot \frac{2z(1+z) - 1 - z^2}{(1+z)^2} = \frac{gh}{2} \cdot \frac{z^2 + 2z - 1}{(1+z)^2} = 0, \quad (11)$$

$$z^2 + 2z - 1 = 0, \quad z = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Úloze vyhovuje kořen  $z_1 = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$ . Druhý kořen  $z_2 = -\sqrt{2} - 1$  nevyhovuje rovnici (10), neboť výraz na pravé straně by byl záporný. Funkce (10) je kladná v intervalu  $(-1, \infty)$ . V bodech  $-1$  a  $\infty$  má nevlastní limitu  $\infty$ . Proto v bodě  $z_1$  dosahuje  $v_0^2$  minima. Dosazením do (10) dostaneme

$$v_{0\min}^2 = \frac{gh}{2} \cdot \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)^2}{\sqrt{2}} = gh(\sqrt{2} - 1).$$

3. a) Zvolme vztažnou soustavu spojenou s rotující nádobou. Působením třecích sil se voda v nádobě uvede do otáčivého pohybu, jehož úhlová rychlost je stejná jako úhlová rychlost nádoby. Hladina vody zaujme tvar rotační plochy. Její *meridián* má rovnici  $y = y(x)$ , kde  $x$  je vzdálenost od osy otáčení. V každém bodu hladiny je tečná rovina kolmá na výslednici tíhové a setrvačné odstředivé síly, které zde působí na částici (obr. R5). S vodorovnou rovinou svírá úhel  $\alpha$ , pro který platí

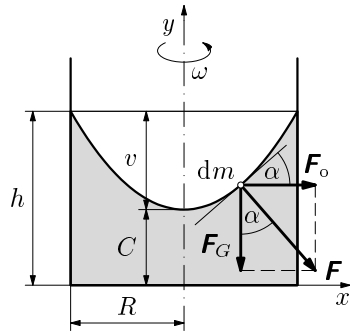
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dm \omega^2 x}{dm g} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Integrací dostaneme

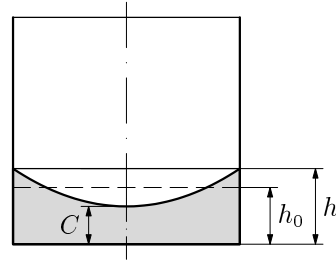
$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C. \quad (1)$$

Hladina zaujme tvar rotačního paraboloidu. Integrační konstanta  $C = y(0)$  udává polohu vrcholu paraboloidu na ose.

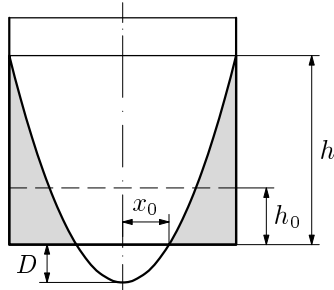
**2 body**



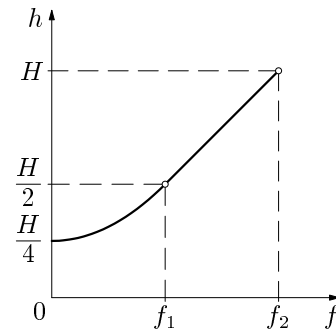
Obr. R5



Obr. R6



Obr. R7



Obr. R8

V dalším řešení použijeme pomocnou větu, kterou si jistě sami snadno odvodíte: Objem rotačního paraboloidu o výšce  $v$  a poloměru  $R$  (obr. R5) je

$$V = \frac{\pi R^2 v}{2}.$$

b, c) Pokud platí  $f \leq f_1$ , nastane situace podle obr. R6. Ze vztahu (1) odvodíme

$$h = y(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + C, \quad h - C = \frac{\omega^2 R^2}{2g},$$

a vyjádříme objem kapaliny

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \pi R^2 (h - C) = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Po úpravě dostaneme

$$h = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} = \frac{H}{4} + \frac{\pi^2 R^2}{g} f^2. \quad (2)$$

Závislost výšky okraje hladiny na frekvenci je kvadratická.

**2 body**

Hladina se dotkne dna, jestliže  $C = 0$ . V takovém případě

$$V = \pi R^2 h_0 = \frac{1}{2} \pi R^2 h, \quad h = 2h_0 = \frac{H}{2}, \quad f = f_1 = \frac{\sqrt{gH}}{2\pi R}.$$

**2 body**



- d, e) Pro  $f_1 \leq f < f_2$  nastane situace podle obr. R7 a integrační konstanta  $C$  je záporná. Pro větší přehlednost označme  $-C = D$ . Hladina protíná rovinu dna v kružnici o poloměru  $x_0$ . Platí

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} - D, \quad h + D = \frac{\omega^2 R^2}{2g}, \quad x_0^2 = \frac{2gD}{\omega^2},$$

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi R^2 h - \left( \frac{\pi R^2 (h + D)}{2} - \frac{\pi x_0^2 D}{2} \right) =$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g} + \frac{\pi g}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2 R^2}{2g} - h \right)^2 = \frac{\pi g}{\omega^2} h^2,$$

$$h = 2\pi R \sqrt{\frac{h_0}{g}} f = \pi R \sqrt{\frac{H}{g}} f. \quad (3)$$

Výška okraje hladiny je přímo úměrná frekvenci. Horní podstavy válce dosáhne při frekvenci

$$f_2 = \frac{\sqrt{gH}}{\pi R} = 2f_1.$$

**2 body**

- f) Graf závislosti výšky okraje hladiny na frekvenci sestrojený na základě vztahů (2) a (3) je na obr. R8. **2 body**

4. a) Vyjdeme z obr. R9. Vzdálenost středu kuličky od středu koule je

$$r = \sqrt{(r_0 + l \sin \alpha)^2 + l^2 (1 - \cos \alpha)^2}.$$

Spojnice obou středů je odchýlena od vodorovného směru o úhel  $\beta$ , přičemž

$$\cos \beta = \frac{r_0 + l \sin \alpha}{r}, \quad \sin \beta = \frac{l(1 - \cos \alpha)}{r}.$$

Vlákno kyvadélka je napínáno silou, která je rovna výslednici  $\mathbf{F}$  tíhové síly  $\mathbf{F}_G$  a elektrostatické síly  $\mathbf{F}_e$ , které působí na kuličku. Velikosti sil vypočítáme užitím sinové věty:

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ + \beta - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta},$$

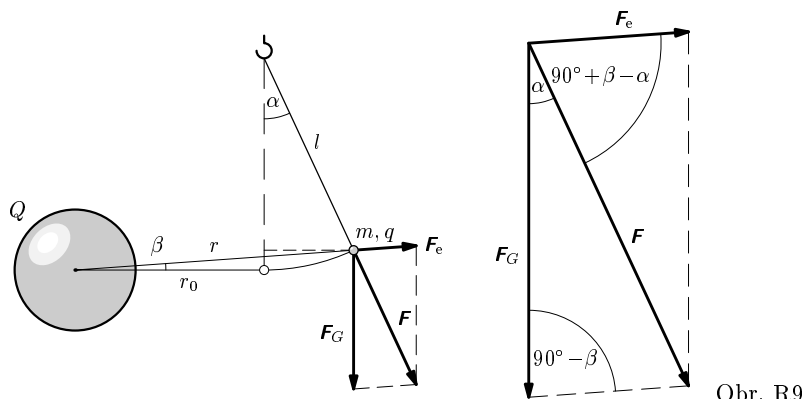
$$F_e = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{\cos \alpha (r_0 + l \sin \alpha)}{r} + \frac{l \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{r}} = \frac{mgr \sin \alpha}{r_0 \cos \alpha + l \sin \alpha} =$$

$$= \frac{mg \sin \alpha \sqrt{(r_0 + l \sin \alpha)^2 + l^2 (1 - \cos \alpha)^2}}{r_0 \cos \alpha + l \sin \alpha} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

$$\frac{F}{F_G} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ + \beta - \alpha)} = \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta},$$

$$F = \frac{mg \frac{r_0 + l \sin \alpha}{r}}{\frac{\cos \alpha (r_0 + l \sin \alpha)}{r} + \frac{l \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{r}} = \frac{mg(r_0 + l \sin \alpha)}{r_0 \cos \alpha + l \sin \alpha} = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

5 bodů



Obr. R9

b) Pro potenciál  $\varphi$  koule platí

$$\varphi = U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{Z toho} \quad Q = 4\pi\epsilon_0 R U = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

2 body

c) Z b) plyne  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = UR$ . Náboj na kuličce kyvadélka určíme z Coulombova zákona:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} = \frac{URq}{r^2},$$

$$q = \frac{F_e r^2}{UR} = \frac{mgr^3 \sin \alpha}{UR(r_0 \cos \alpha + l \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{mg \sin \alpha \left( (r_0 + l \sin \alpha)^2 + l^2 (1 - \cos \alpha)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{UR(r_0 \cos \alpha + l \sin \alpha)} = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

3 body

5. a) Za daných předpokladů jsou obě ramena  $O_1P_1$  a  $O_2P_2$  namáhána stejně. Můžeme je teoreticky nahradit jediným ramenem spojujícím střed úsečky  $O_1O_2$  a těžiště kabiny s člověkem a pohyb obsazené kabiny vyšetřovat jako pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m$ , na který působí dvě síly – tíhová síla  $F_G$  a reakce ramene  $R$  (obr. R10, R11). Jejich výslednice  $F$  uděluje kabině zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\mathbf{F}_G + \mathbf{R}}{m}.$$

Tečná složka výslednice, která je současně tečnou složkou tíhové síly  $F_t = F_1$ , uděluje kabině tečné zrychlení  $a_t$

$$a_t = \frac{F_1}{m} = \frac{mg \sin \varphi}{m} = g \sin \varphi.$$

Pro  $0 < \varphi < 180^\circ$  je tečné zrychlení kladné a rychlost kabiny se zvětšuje, pro  $180^\circ < \varphi < 360^\circ$  je tečné zrychlení záporné a rychlost kabiny se zmenšuje.

Normálová složka výslednice, která je vektorovým součtem složky  $F_2$  tíhové síly ve směru poloměru a reakce ramene  $R$ , uděluje kabině dostředivé zrychlení  $a_n$  o velikosti  $v^2/r$ . Rychlost kabiny určíme užitím zákona zachování mechanické energie:

$$mgh = mgr(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gr(1 - \cos \varphi).$$

Pak  $a_n = \frac{v^2}{r} = 2g(1 - \cos \varphi)$ .

Zvolme vztahnou soustavu podle obr. R11. Celkové zrychlení kabiny je vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = (a_t \cos \varphi - a_n \sin \varphi, a_t \sin \varphi + a_n \cos \varphi) = \\ &= g(3 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi, 1 + 2 \cos \varphi - 3 \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

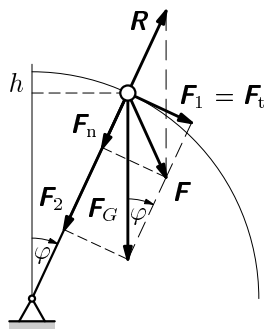
Pro velikost a směr celkového zrychlení platí

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = g\sqrt{5 - 8 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi},$$

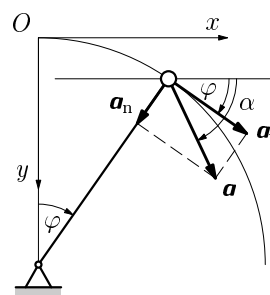
$$\alpha = \varphi + \arctg \frac{a_n}{a_t} = \varphi + \arctg \frac{2(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi},$$

kde  $\alpha$  je měřeno od osy  $x$  s orientací úhlu  $\varphi$ .

3 body



Obr. R10



Obr. R11

- b) Platí  $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_2 + \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_2$ . Orientace složky  $\mathbf{F}_2$  a reakce  $\mathbf{R}$  vzhledem ke středu trajektorie se během pohybu mění, stále však platí

$$|\mathbf{R}| = |ma_n - mg \cos \varphi| = mg|2 - 3 \cos \varphi|.$$

Reakce ramene je nulová a rameno tedy není namáháno v okamžiku, kdy

$$\cos \varphi = \frac{2}{3}, \quad \text{tedy pro úhly } \varphi_1 = 48,2^\circ, \quad \varphi_2 = 311,8^\circ.$$

Jestliže  $2 - 3 \cos \varphi < 0$ , tj. pro  $0 \leq \varphi < \varphi_1$  a pro  $\varphi_2 < \varphi \leq 360^\circ$ , směřuje reakce ramene od středu a rameno je namáháno tlakem. Jestliže  $2 - 3 \cos \varphi > 0$ , tj. pro  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ , směřuje reakce ramene do středu a rameno je namáháno tahem.

**3 body**

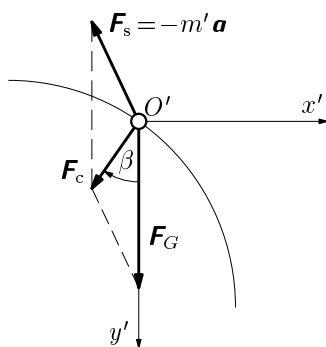
- c) V neinerciální vztažné soustavě spojené s kabinou působí na člověka o hmotnosti  $m'$  výslednice  $\mathbf{F}_c$  tíhové síly  $\mathbf{F}_G$  a setrvačné síly  $\mathbf{F}_s$  (obr. R12). Platí

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_s = m'(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = m' \left( \mathbf{g} - \frac{\mathbf{F}_G + \mathbf{R}}{m} \right) = -\frac{m'}{m} \mathbf{R}.$$

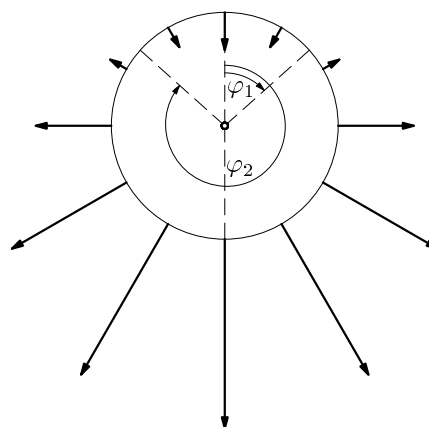
Výsledná síla  $\mathbf{F}_c$  má tedy v každém okamžiku opačný směr než reakce, kterou působí rameno na kabinu a velikost  $F_c = m'g|2 - 3 \cos \varphi|$ . Závislost výsledné síly působící na člověka v kabině na úhlu  $\varphi$  je patrná z obr. R13:

- Pro  $\varphi = 0$  je  $\mathbf{F}_c = m'\mathbf{g}$ .
- Pro  $0 \leq \varphi < \varphi_1$  a pro  $\varphi_2 < \varphi \leq 360^\circ$  výsledná síla směřuje do středu trajektorie.
- Pro  $\varphi = \varphi_1$  a pro  $\varphi = \varphi_2$  nastává beztížný stav.
- Pro  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  výsledná síla směřuje od středu trajektorie. Největší velikost má pro  $\varphi = 180^\circ$ , kdy  $F_c = 5m'g$ .

**4 body**



Obr. R12



Obr. R13

7. a) Vydeme ze zákonů zachování relativistické hybnosti a relativistické energie

$$\mathbf{p}_K = \mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_{\pi^0}, \quad E_K = E_{\pi^+} + E_{\pi^0}. \quad (1)$$

V soustavě, ve které je rozpadající se mezon  $K^+$  v klidu, platí  $p_K = 0$  a energie mezonu  $K^+$  je rovna klidové energii  $E_K = m_K c^2$ . Oba zákony lze proto přepsat do tvaru

$$-\mathbf{p}_{\pi^+} = \mathbf{p}_{\pi^0}, \quad (2)$$

$$m_K c^2 - E_{\pi^+} = E_{\pi^0}. \quad (3)$$

**2 body**

Vynásobíme-li rovnici (2) rychlostí světla  $c$  a umocníme obě rovnice na druhou, dostáváme

$$c^2 p_{\pi^+}^2 = c^2 p_{\pi^0}^2, \quad (4)$$

$$m_K^2 c^4 - 2m_K c^2 E_{\pi^+} + E_{\pi^+}^2 = E_{\pi^0}^2. \quad (5)$$

Odečtení první rovnice (4) od (5) vede ke vztahu

$$m_K^2 c^4 - 2m_K c^2 E_{\pi^+} + \underbrace{E_{\pi^+}^2 - c^2 p_{\pi^+}^2}_{m_{\pi^+}^2 c^4} = \underbrace{E_{\pi^0}^2 - c^2 p_{\pi^0}^2}_{m_{\pi^0}^2 c^4}.$$

Vyjádříme-li z poslední rovnice  $E_{\pi^+}$ , vychází

$$E_{\pi^+} = c^2 \frac{m_K^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_K}. \quad (6)$$

Odečtením klidové energie pak získáme kinetickou energii mezonu

$$T_{\pi^+} = E_{\pi^+} - m_{\pi^+} c^2 = c^2 \frac{m_K^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 - 2m_K m_{\pi^+}}{2m_K} \doteq 110,5 \text{ MeV}.$$

Velikost  $v_{\pi^+}$  rychlosti mezonu najdeme z jeho celkové energie  $E_{\pi^+}$ , neboť platí

$$E_{\pi^+} = \frac{m_{\pi^+} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\pi^+}^2}{c^2}}}.$$

Vyjádříme-li  $v_{\pi^+}$  a dosadíme-li za  $E_{\pi^+}$  z (6), dostáváme

$$v_{\pi^+} = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_{\pi^+} c^2}{E_{\pi^+}} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left( \frac{2m_K m_{\pi^+}}{m_K^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2} \right)^2} \doteq 0,83 c.$$

Číselně  $v_{\pi^+} \doteq 2,49 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vzhledem k symetrii rovnic (1) odvodíme další vztahy záměnou indexů.

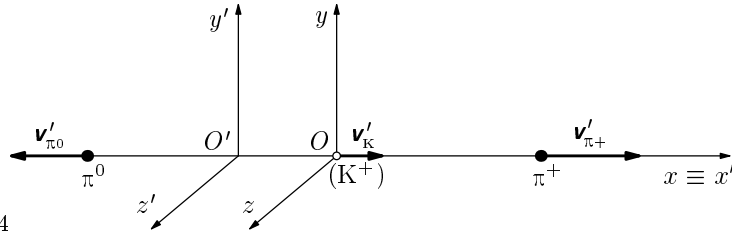
$$T_{\pi^0} = c^2 \frac{m_K^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2 - 2m_K m_{\pi^0}}{2m_K} \doteq 112,6 \text{ MeV},$$

$$v_{\pi^0} = c \sqrt{1 - \left( \frac{2m_K m_{\pi^0}}{m_K^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2} \right)^2} \doteq 0,84 c.$$

Číselně  $v_{\pi^0} \doteq 2,51 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**4 body**

- b) Po rozpadu mezonu  $K^+$  pokračuje těžiště soustavy  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  v pohybu, který před rozpadem konal mezon  $K^+$ . Vzážnou soustavu  $Oxyz$ , ve které byl mezon v klidu, a vztažnou soustavu  $O'x'y'z'$  v laboratoři volíme podle obr. R14, který je nakreslen z hlediska pozorovatele v laboratoři.



Obr. R14

Podle relativistického zákona skládání rychlostí musí platit

$$v'_{\pi^+} = \frac{v_{\pi^+} + v'_K}{1 + \frac{v_{\pi^+} v'_K}{c^2}}.$$

Pro  $v'_K$  tak dostáváme

$$v'_K = \frac{v'_{\pi^+} - v_{\pi^+}}{1 - \frac{v'_{\pi^+} v_{\pi^+}}{c^2}} \doteq 0,0687 c \doteq 2,06 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro celkovou energii  $E'_K$  mezonu  $K^+$  ve vztažné soustavě spojené s laboratoří pak vychází

$$E'_K = \frac{m_K c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_K}{c^2}}} \doteq 498,9 \text{ MeV}.$$

**4 body**