

Řešení úloh 1. kola 45. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 4, 5, 7), I. Volf (2), V. Vícha (6)

1. Označme s dráhu uraženou jedním směrem, pro prvního cyklistu t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy, pro druhého cyklistu analogicky t'_1 dobu jízdy nahoru, t'_2 dobu jízdy dolů a t' celkovou dobu jízdy.

a) Platí

$$v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 23,70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

3 body

b) Platí

$$v'_2 = \frac{s}{t' - t'_1} = \frac{s}{\frac{2s}{v'_p} - \frac{s}{v'_1}} = \frac{v'_1 v'_p}{2v'_1 - v'_p} = 47,02 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Jiná možnost řešení: Použít výsledek úlohy a), z něj vyjádřit v_2 a všechny rychlosti „opatřit čárkou“.

3 body

c) Pro prvního cyklistu platí

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{s}{v_1}}{\frac{s}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1} = 2,72,$$

pro druhého cyklistu analogicky $\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_2}{v'_1}$. Dosazením výsledku úlohy b) dostaneme

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_p}{2v'_1 - v'_p} = 2,95.$$

4 body

2. a) Z rovnic $v_{m1} = a_1 t_1$, $s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ pro první běh plyne

$$v_{m1} = \frac{2s_1}{t_1} = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Čas dosažený na celé dráze při prvním běhu je

$$t_{k1} = t_1 + \frac{s - s_1}{v_{m1}} = \frac{s + s_1}{2s_1} t_1 = 17,0 \text{ s}.$$

Analogicky pro druhý běh

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2} = 8,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad t_{k2} = \frac{s + s_2}{2s_2} t_2 = 15,2 \text{ s}.$$

4 body

b) Při třetím běhu platí

$$s - s_3 = v_{m3}(t_{k3} - t_3) = v_{m3} \left(t_{k3} - \frac{2s_3}{v_{m3}} \right) = v_{m3} t_{k3} - 2s_3,$$

$$v_{m3} = \frac{s + s_3}{t_{k3}} = 10,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

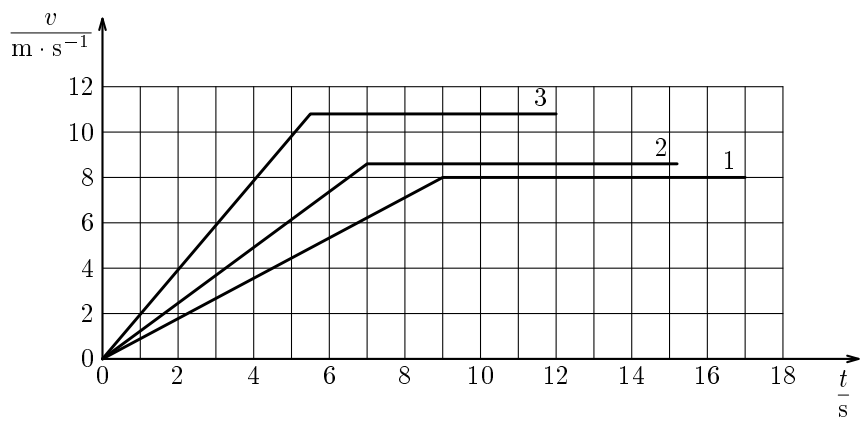
2body

c) K sestrojení grafů (obr. R1) je nutné dopočítat čas

$$t_3 = \frac{2s_3}{s + s_3} t_{k3} = 5,5 \text{ s}.$$

Zbývající veličiny $t_1, t_2, t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, v_{m1}, v_{m2}$ a v_{m3} už známe.

3 body



Obr. R1

d) Zrychlení při rozbíhání při jednotlivých pohybech jsou

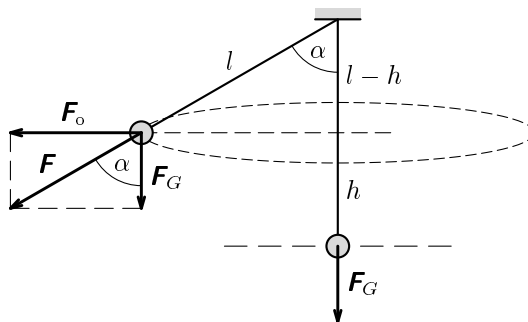
$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} = 0,89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

1 bod

3. a) Vydeme z obr. R2. Podle pozorovatele ve vztažné soustavě otáčející se s obíhající koulí je síla \mathbf{F} , která napíná lanko, výslednicí tíhové síly \mathbf{F}_G a setrvačné odstředivé síly \mathbf{F}_o . Platí

$$F = \frac{F_G}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha} = 2mg = 51 \text{ N}.$$

2 body



Obr. R2

- b) Odstředivá síla \mathbf{F}_o má velikost

$$F_o = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{l \sin \alpha} = F_G \operatorname{tg} \alpha = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Z toho

$$v^2 = \frac{lg \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3gl}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{lg \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{3gl}{2}} = 6,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- c) Současně platí

$$F_o = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4m\pi^2 l \sin \alpha}{T^2} = mg \operatorname{tg} \alpha = mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Z toho

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2,28 \text{ s}.$$

2 body

- d) Pohybující se koule má vůči původní poloze celkovou mechanickou energii

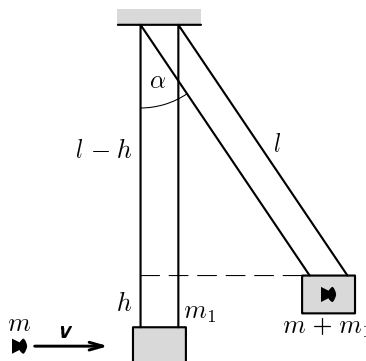
$$\begin{aligned} E = E_p + E_k &= mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2}mlg \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= mgl \left(1 - \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \right) = \frac{5}{4}mgl = 82 \text{ J}. \end{aligned}$$

3 body

4. a) Ze zákona zachování hybnosti plyne pro izolovanou soustavu krabice a diabola

$$mv = (m + m_1)v_1 \quad v_1 = \frac{m}{m + m_1}v, \quad (1)$$

kde v_1 je velikost okamžité rychlosti soustavy bezprostředně po zásahu. Porovnáním kinetické energie bezprostředně po zásahu a potenciální energie v krajní poloze ve výšce $h = l(1 - \cos \alpha)$, kde se soustava zastaví, dostaneme:



Obr. R3

$$(m + m_1)gl(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 = \frac{m^2}{2(m + m_1)}v^2,$$

$$v = \frac{m + m_1}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 190 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

- b) Kinetická energie střely je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(m + m_1)^2 gl(1 - \cos \alpha)}{m} = 9,4 \text{ J},$$

což je potenciální energie tělesa o hmotnosti 1 kg ve výšce 94 cm.

2 body

- c) Hledaný poměr je $k = \frac{\frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2}{\frac{1}{2}mv^2}$. Užitím vztahu (1) dostaneme

$$k = \frac{m}{m + m_1} = 0,85 \text{ \%}.$$

Naprostá většina kinetické energie střely se tedy při zásahu přemění na vnitřní energii soustavy.

2 body

- d) Z kinematických rovnic $v = at$, $d = \frac{1}{2}at^2$ plyne

$$t = \frac{2d}{v} = 0,0056 \text{ s}, \quad a = \frac{v^2}{2d} = 34\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

5. a) Práce vykonaná motorem během rozjíždění je rovna kinetické energii automobilu na konci rozjíždění, kdy se automobil pohyboval rychlostí $v_k = at_r$. Průměrný výkon byl

$$P_p = \frac{W}{t_r} = \frac{\frac{1}{2}mv_k^2}{t_r} = \frac{1}{2}ma^2t_r = 16 \text{ kW}.$$

2 body

- b) Okamžitý výkon síly $F = ma$ při rychlosti $v = at$ je $P = Fv = ma^2t$.

$$P_1 = ma^2t_1 = 20 \text{ kW}, \quad P_k = ma^2t_r = 32 \text{ kW}.$$

2 body

- c) Podle výsledku úlohy b) je okamžitý výkon $P = ma^2t$ během rozjíždění přímo úměrný času. Grafem je úsečka s jedním koncovým bodem v počátku (obr. R4).

1 bod

- d) Při stálém výkonu P_k platí

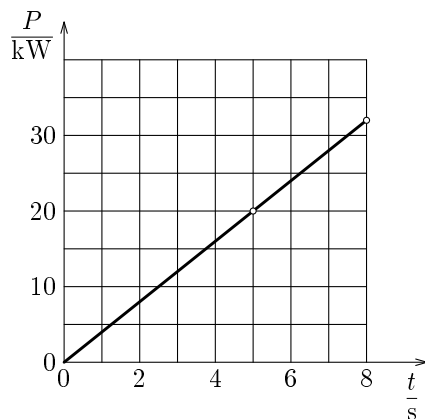
$$P_k t = \frac{1}{2}mv'^2, \quad v' = \sqrt{\frac{2P_k t}{m}}, \quad v_k = \sqrt{\frac{2P_k t_r}{m}} = 22,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

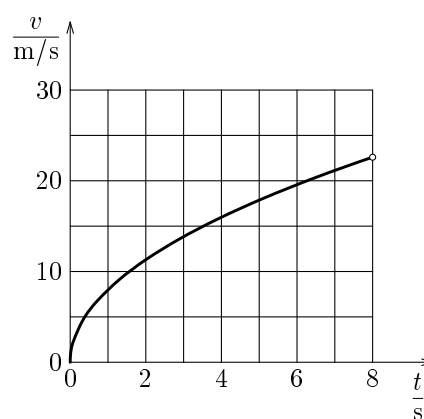
- e) Podle výsledku úlohy d) je okamžitá rychlost přímo úměrná 2. odmocnině času. Grafem je úsek paraboly (obr. R5), k jejímu sestavení sestavíme tabulku:

t/s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	0	8,0	11,3	13,9	16,0	17,9	19,6	21,2	22,6

3 body



Obr. R4



Obr. R5

7. a) Pro dobu letu a výšku vrhu platí:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad h = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{t_1}{2} - \frac{1}{2}g \left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}g \left(\frac{t_1}{2}\right)^2.$$

Z toho

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 3,38 \text{ s.} \quad (1)$$

2 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že těleso má minimální rychlost v nejvyšším bodě trajektorie a maximální rychlost v místě vrhu a v místě dopadu. V nejvyšším bodě trajektorie je y -ová složka rychlosti nulová, x -ová je proto rovna hledané minimální rychlosti. S použitím vztahu (1) dostaneme

$$v_{\min} = v_x = \frac{d}{t_1} = d\sqrt{\frac{g}{8h}} = 11,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (2)$$

Porovnáním mechanické energie v nejvyšším a nejnižším bodě získáme rovnici

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + mgh,$$

z níž s užitím vztahu (2) odvodíme

$$v_{\max} = \sqrt{v_{\min}^2 + 2gh} = \sqrt{\frac{g(d^2 + 16h^2)}{8h}} = 19,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (3)$$

3 body

c) V místě vrhu platí $v_y = v_0 \sin \alpha = \frac{gt_1}{2}$, $v_x = v_0 \cos \alpha = \frac{d}{t_1}$. Z toho s užitím vztahu (1) dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt_1^2}{2d} = \frac{4h}{d}, \quad \alpha = 56,5^\circ.$$

2 body

d) Délka vrhu je $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Maximální délky vrhu bychom dosáhli při elevačním úhlu 45° . S užitím vztahu (3) dostaneme

$$d_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{g} = \frac{d^2 + 16h^2}{8h} = 40,2 \text{ m.}$$

3 body