

Řešení úloh regionálního kola 45. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

- 1.a) Látkové množství vodíku vyloučené za jednu hodinu v jednom rozkladném článku je

$$n = \frac{V_0}{kV_{m0}} = \frac{250 \text{ m}^3}{100 \cdot 2,2414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} = 111,5 \text{ mol}.$$

Protože na vyloučení jedné molekuly vodíku jsou zapotřebí dva elementární náboje, projde každým článkem za hodinu náboj

$$Q = N \cdot 2e = nN_A \cdot 2e = 2nF = 2,15 \cdot 10^7 \text{ C},$$

kde N je počet molekul vodíku vyloučených za jednu hodinu v jednom článku, N_A je Avogadrova konstanta a F je Faradayova konstanta. Obvodem tedy prochází proud $I = \frac{Q}{t} = 6,0 \cdot 10^3 \text{ A}$.

6 bodů

- b) Celková hmotnost vodíku vyloučeného elektrolýzou za jednu hodinu je

$$m = nM_m = \frac{V_0}{V_{m0}} M_m = 22,5 \text{ kg}.$$

Jeho spálením se získá teplo $Q_s = 22,5 \text{ kg} \cdot 143 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1} = 3,19 \cdot 10^9 \text{ J}$. Elektrická práce za stejnou dobu je $W_{el} = kUQ = 4,74 \cdot 10^9 \text{ J}$. Energetická účinnost výroby je

$$\eta = \frac{Q_s}{W_{el}} = 67 \%.$$

4 body

2.a) Vyjdeme z vlastností trojúhelníků na obr. R1 a ze zákona lomu. Platí

$$|AC| = 2h \operatorname{tg} \beta = 2h \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 2h \frac{\frac{\sin \alpha}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = 2h \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

$$d = |CD| = |AC| \cos \alpha = 2h \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{h \sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

4 body

b) Dostali jsme funkci úhlu α , která je v intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ spojitá, v bodech 0 a $\pi/2$ má hodnotu 0 a uvnitř intervalu je všude kladná. Musí tedy v některém vnitřním bodě intervalu dosáhnout maxima. Určíme první derivaci d podle α a položíme ji rovnu 0:

$$\begin{aligned} \frac{dd}{d\alpha} &= h \frac{2 \cos 2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin 2\alpha \frac{1}{2}(-2 \sin \alpha \cos \alpha)}{n^2 - \sin^2 \alpha} = \\ &= h \frac{4 \cos 2\alpha (n^2 - \sin^2 \alpha) + \sin^2 2\alpha}{2(n^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme pro čitatele podmínku

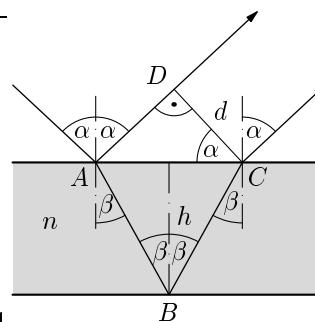
$$4(1 - 2 \sin^2 \alpha)(n^2 - \sin^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha) = 0$$

a po další úpravě dojdeme k bikvadratické rovnici

$$\sin^4 \alpha - 2n^2 \sin^2 \alpha + n^2 = 0.$$

Protože $n > 1$, vyhovuje pouze kořen

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m = \sqrt{n^2 - n \sqrt{n^2 - 1}}.$$



Obr. R1

4 body

Pro dané hodnoty vychází

$$\sin \alpha_m = 0,75526, \alpha_m = 49,0^\circ, d_m = 37,5 \text{ mm}.$$

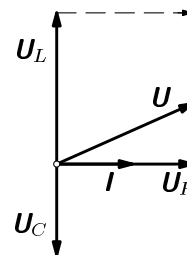
2 body

- 3.a) Z fázorového diagramu sériového obvodu LRC (obr. R2) odvodíme pro impedanci obvodu vztah

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Platí tedy

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2, \quad Z_2^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2.$$



Obr. R2

Z rovnosti $Z_1^2 = Z_2^2$ dostaneme

$$\frac{2L}{C_2} - \frac{2L}{C_1} + \frac{1}{\omega^2 C_1^2} - \frac{1}{\omega^2 C_2^2} = 0, \quad L = \frac{C_1 + C_2}{2\omega^2 C_1 C_2},$$

$$R^2 = Z_1^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2 = Z_1^2 - \left(\frac{C_1 + C_2}{2\omega C_1 C_2} - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2 = Z_1^2 - \left(\frac{C_1 - C_2}{2\omega C_1 C_2}\right)^2,$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{C_1 - C_2}{2\omega C_1 C_2}\right)^2}.$$

Pro dané hodnoty $L = 2,15 \cdot 10^{-4}$ H, $R = 352 \Omega$.

5 bodů

- b) Obvodem bude procházet maximální proud, bude-li impedance minimální, tedy když $X_C = X_L$ – sériová rezonance. Pak

$$C = C_r = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2,40 \cdot 10^2 \text{ pF}.$$

Při sériové rezonanci platí $Z = R$ a obvodem prochází proud

$$I_r = \frac{U}{R} = 5,68 \text{ mA}.$$

3 body

- c) Při sériové rezonanci bude na kondenzátoru napětí

$$U_{C_r} = X_{C_r} I_r = \frac{I_r}{\omega C_r} = 5,38 \text{ V}.$$

2 body

4.a) $[k] = \left[\frac{F}{Bv} \right] = \frac{\text{N}}{\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \text{A} \cdot \text{s}.$

1 bod

- b) Vyšetřujeme pohyb soustavy dvou těles spojených vláknem. Roztočení kotouče je způsobeno momentem síly vlákna \mathbf{F} , proti kterému působí moment brzdící síly \mathbf{F}_v . Na závaží působí tíhová síla $m\mathbf{g}$ a proti ní síla vlákna $-\mathbf{F}$. Výslednice obou sil uděluje závaží zrychlení \mathbf{a} . Platí

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = Fr_1 - F_v r_0,$$

$$ma = mr_1 \frac{d\omega}{dt} = mg - F.$$

Vynásobením druhé rovnice r_1 a sečtením obou rovnic dostaneme pohybovou rovnici soustavy

$$(J_0 + mr_1^2) \frac{d\omega}{dt} = mgr_1 - F_v r_0 = mgr_1 - kB\omega r_0^2.$$

(Setrvačnost závaží se projevuje stejně jako setrvačnost hmotného bodu o hmotnosti m připevněného ke kotouči ve vzdálenosti r_1 od osy.)

3 body

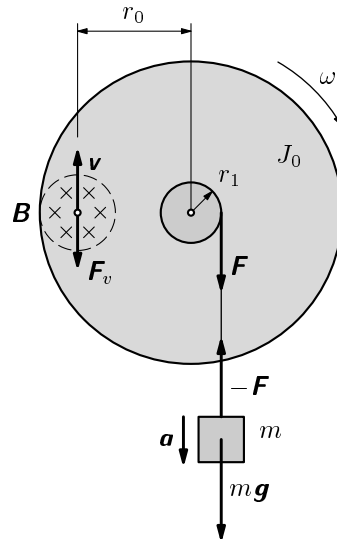
Jestliže $B = B_0 = 0$, působí na soustavu jen konstantní moment tíhové síly $m\mathbf{g}$, otáčivý pohyb kotouče je rovnoměrně zrychlený a jeho úhlová rychlost neomezeně roste.

Jestliže $B \neq 0$, zvětšuje se s rostoucí úhlovou rychlostí kotouče brzdící moment síly \mathbf{F}_v , až po dosažení mezní úhlové rychlosti ω_m se vyrovná s momentem tíhové síly a otáčivý pohyb kotouče je rovnoměrný. Z rovnosti momentů dostaneme

$$mgr_1 = kB\omega_m r_0^2, \quad \omega_m = \frac{mgr_1}{kB r_0^2}.$$

Po dosazení číselných hodnot pro $B = B_1$ je $\omega_{m1} = 81,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 body



Obr. R3

c) Jestliže $B = B_0 = 0$, platí

$$(J_0 + mr_1^2) \frac{d\omega}{dt} = mgr_1, \quad d\omega = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2} dt, \quad \omega = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2} t.$$

V čase $t = 5$ s je $\omega = \omega_0 = 120 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

1 bod

Pro $B \neq 0$ upravíme pohybovou rovnici na tvar

$$\frac{J_0 + mr_1^2}{mgr_1} \cdot \frac{d\omega}{dt} = 1 - \frac{kBr_0^2}{mgr_1} = 1 - \frac{\omega}{\omega_m},$$

separujeme proměnné

$$\frac{\omega_m d\omega}{\omega_m - \omega} = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2} dt$$

a integrujeme

$$\omega_m \int_0^\omega \frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = -\omega_m \ln \frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2} t.$$

Z toho vyjádříme hledanou funkci:

$$\omega = \omega_m \left(1 - e^{-\frac{mgr_1}{\omega_m(J_0 + mr_1^2)} t} \right) = \frac{mgr_1}{kBr_0^2} \left(1 - e^{-\frac{kBr_0^2}{(J_0 + mr_1^2)} t} \right).$$

V čase $t = 5$ s:

pro $B = B_1$ je $\omega = \omega_1 = 62,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

3 body