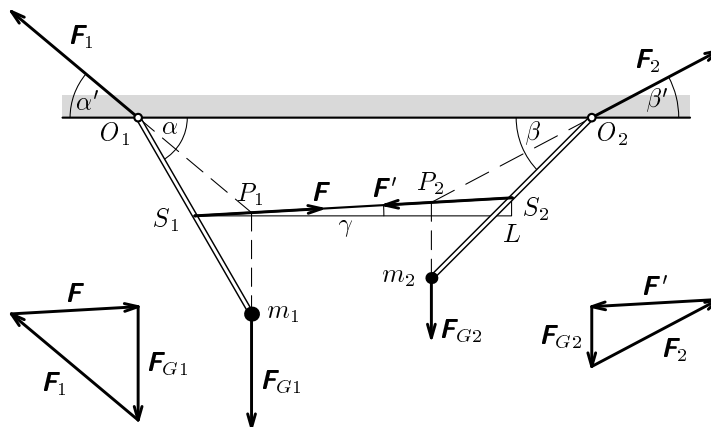


Řešení úloh celostátního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 3) a B. Vybíral (4). Konečná úprava P. Šedivý.

1. Úlohu je možno řešit **graficky** podle obr. R1. Na první kyvadlo působí tíhová síla \mathbf{F}_{G1} tělesa umístěného na konci tyče, síla vlákna \mathbf{F} a síla \mathbf{F}_1 v bodě O_1 . Tyto tři síly splňují podmínky rovnováhy a jejich vektorové přímky se protínají v jediném bodě P_1 – průsečíku vlákna a svislice procházející koncem prvního kyvadla. Protože $\mathbf{F}_{G1} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$, tvoří tyto síly uzavřený obrazec – trojúhelník, ve kterém známe směr a velikost síly \mathbf{F}_{G1} a směry sil \mathbf{F} a \mathbf{F}_1 . Trojúhelník je tedy určen podle věty *usu*, můžeme jej ve vhodném měřítku sestavit, změřit velikosti sil \mathbf{F} a \mathbf{F}_1 a odchytku síly \mathbf{F}_1 od vodorovného směru.

Obdobná je situace u druhého kyvadla, kde se vektorové přímky sil \mathbf{F}_{G2} , \mathbf{F}' a \mathbf{F}_2 protínají v bodě P_2 . Tyto síly tvoří trojúhelník, ve kterém známe směr a velikost síly \mathbf{F}' a směry sil \mathbf{F}_{G2} a \mathbf{F}_2 . Podle zákona akce a reakce je $|\mathbf{F}'| = |\mathbf{F}|$. Z trojúhelníka můžeme odměřit velikosti sil \mathbf{F}_{G2} a \mathbf{F}_2 a odchytku síly \mathbf{F}_2 od vodorovného směru. Hmotnost druhého tělesa je $m_2 = F_{G2}/g$.



Obr. R1

Počtení řešení

- a) Nejprve určíme odchytku gumového vlákna od vodorovného směru. Z trojúhelníku S_1S_2L dostaneme

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{l}{2}(\sin \alpha - \sin \beta)}{n - \frac{l}{2}(\cos \alpha + \cos \beta)} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\frac{2n}{l} - (\cos \alpha + \cos \beta)} = 0,0569, \quad \gamma = 3,23^\circ.$$

Síla \mathbf{F} svírá s tyčí prvního kyvadla úhel $\alpha + \gamma$. Podle momentové věty vzhledem k ose v bodě O_1 platí

$$F \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin(\alpha + \gamma) = m_1 g l \cos \alpha, \quad F = \frac{2m_1 g \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = 32,96 \text{ N} \doteq 33,0 \text{ N}.$$

4 body

b) U druhého kyvadla platí podle momentové věty vzhledem k ose v bodě O_2

$$m_2 g l \cos \beta = F' \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin(\beta - \gamma), \quad F' = F,$$

$$m_2 = \frac{F \sin(\beta - \gamma)}{2g \cos \beta} = \frac{m_1 \cos \alpha \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \cos \beta} = 1,58 \text{ kg}.$$

3 body

c) Z podmínek rovnováhy plyne

$$F_{1x} = -F \cos \gamma = -32,90 \text{ N}, \quad F_{1y} = F_{G1} - F \sin \gamma = 27,6 \text{ N},$$

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = 42,9 \text{ N}, \quad \text{tg } \alpha' = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = 0,8380, \quad \alpha' = 40,0^\circ.$$

$$F_{2x} = F \cos \gamma = 32,90 \text{ N}, \quad F_{2y} = F_{G2} + F \sin \gamma = 17,4 \text{ N},$$

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = 37,2 \text{ N}, \quad \text{tg } \beta' = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = 0,528, \quad \beta' = 27,8^\circ.$$

3 body

Plný počet bodů je možno předělit i řešiteli, který provedl pouze grafické řešení s výstižným komentářem a z něj získal měřením výsledky s chybou nepřekračující 2 %.

2. a) Kondenzátor tvořený deskami S a D má kapacitu

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{a} = 44,3 \text{ pF}.$$

Při napětí U vzniknou na jeho deskách nesouhlasné náboje o velikosti

$$Q = CU = 88,5 \text{ nC}.$$

4 body

b) Pole mezi deskami kondenzátoru, jehož intenzita je $E = U/a$ vzniká superpozicí polí horní a dolní desky. Samotné pole dolní desky D má v každém místě prostoru intenzitu o velikosti $E_1 = U/(2a)$ a působí na náboj Q horní desky silou o velikosti

$$F = E_1 Q = \frac{U}{2a} CU = \frac{CU^2}{2a} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2a^2} = 0,0443 \text{ N}.$$

4 body

c) Na obnovení rovnováhy musíme na misku vah položit závaží o hmotnosti

$$m = \frac{F}{g} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2a^2 g} = 4,51 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 4,51 \text{ g}.$$

2 body

Poznámky:

1. Intenzitu elektrického pole dolní desky lze také určit užitím *Gaussovy věty*:

$$E_1 \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{CU}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2a}.$$

2. *Odvození vztahu pro výpočet síly užitím zákona zachování energie:*

Zvedneme-li horní desku z rovnovážné polohy do velmi malé vzdálenosti da , spotřebuje elektrická síla působící na horní desku práci, která se rovná přírůstku celkové energie zdroje a kondenzátoru.

Kapacita kondenzátoru se změní o $dC = -\frac{\varepsilon_0 S}{a^2} da$.

Náboj kondenzátoru se změní o $dQ = U \cdot dC$.

Energie zdroje se změní o $dE_z = -U \cdot dQ = -U^2 \cdot dC$.

Energie kondenzátoru se změní o $dE_c = \frac{1}{2} U^2 \cdot dC$.

$$dW = F \cdot da = dE_z + dE_c = -\frac{1}{2} U^2 \cdot dC, \quad F = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dC}{da} \cdot U^2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2a^2}.$$

3. a) Aby na stínítku vznikl ostrý obraz zdroje Z, musela by být splněna soustava rovnic

$$a + a' = c = 3f, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}.$$

Substitucí $a' = 3f - a$ a úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$a^2 - 3fa + 3f^2 = 0,$$

která má diskriminant $D = -3f^2 < 0$. Soustava proto nemá reálné řešení.

2 body

b) Paprsky, které na čočce osvětlují plochu o obsahu S_0 , osvětlují na stínítku plochu o obsahu S . Z rovnosti světelných toků plyne

$$E_0 S_0 = ES, \quad E = E_0 \frac{S_0}{S} = \frac{I}{a^2} \cdot \frac{S_0}{S}, \quad (1)$$

kde E_0 je osvětlení v rovině čočky a E v rovině stínítka. Mohou nastat tyto možnosti:

1) $a = f$. Pak platí podle obr. R2a:

$$S = S_0, \quad E = E_0 = \frac{I}{f^2}.$$

2) $f < a < 3f$. Pak za stínítkem leží skutečný obraz zdroje Z' . Paprsky se za čočkou sbíhají a $S < S_0$ (obr. R2b).

3) $0 < a < f$. Pak vznikne před zdrojem Z zdánlivý obraz zdroje Z' . Paprsky se za čočkou rozbíhají a $S > S_0$ (obr. R2c).

V případech 2) a 3) platí

$$\frac{S_0}{S} = \frac{a'^2}{x^2}, \quad \text{kde } x = a + a' - c = a + a' - 3f,$$

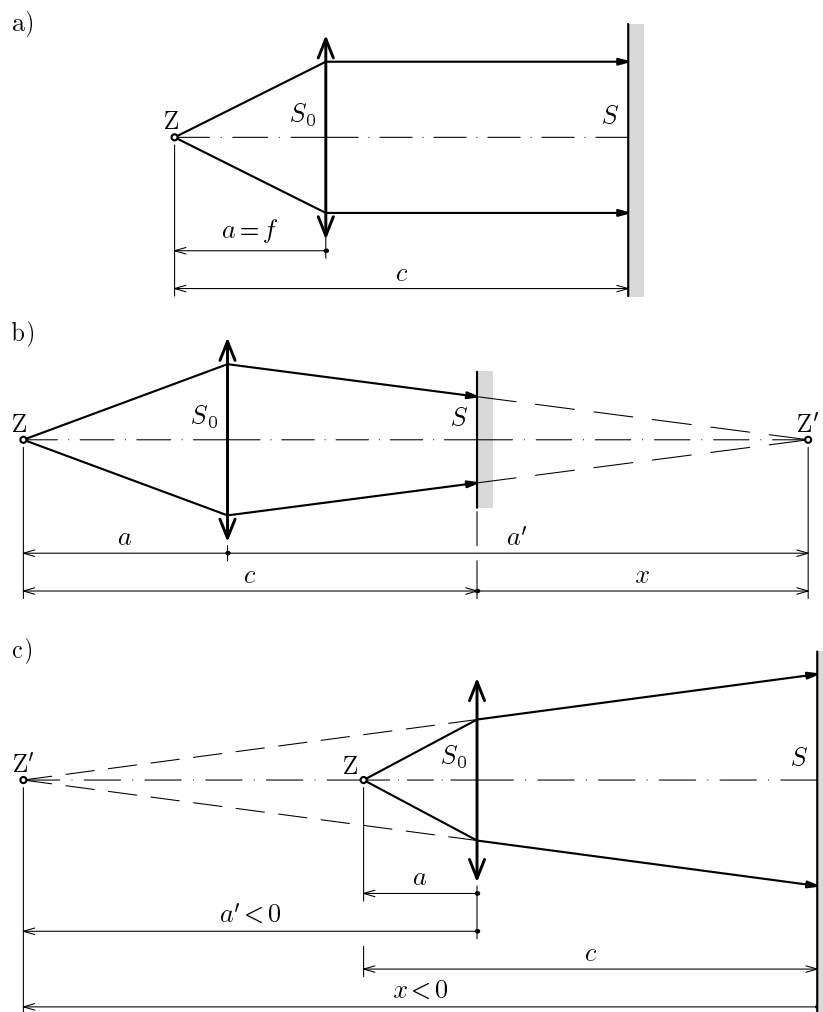
$|x|$ je vzdálenost stínítka od obrazu Z' . Užitím zobrazovací rovnice čočky vyjádříme

$$x = a + \frac{af}{a-f} - c = \frac{a^2 - ac + cf}{a-f} = \frac{a^2 - 3af + 3f^2}{a-f}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$E = \frac{I}{a^2} \cdot \frac{\frac{a^2 f^2}{(a-f)^2}}{\frac{(a^2 - 3af + 3f^2)^2}{(a-f)^2}} = \frac{I f^2}{(a^2 - 3af + 3f^2)^2} = \frac{I f^2}{\left[\left(a - \frac{3}{2}f \right)^2 + \frac{3}{4}f^2 \right]^2}. \quad (2)$$

4 body



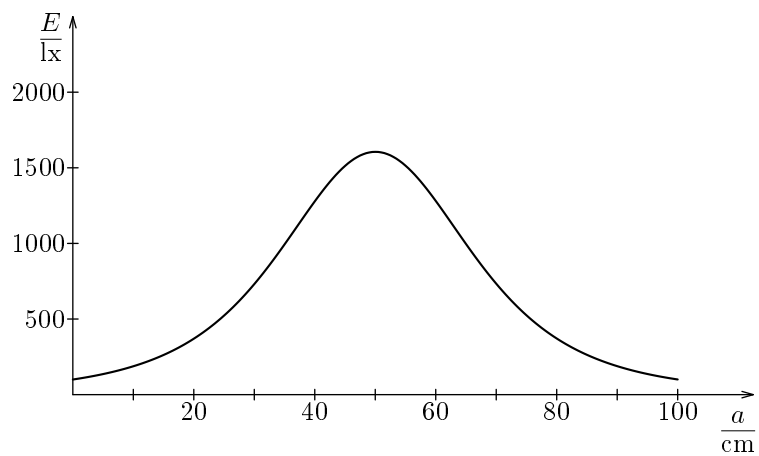
Obr. R2

c) Posouváním čočky můžeme měnit a v intervalu $(0, c) = (0, 3f)$.

α) Pro $a \rightarrow 0$ a pro $a \rightarrow 3f$ je $E = \frac{I}{9f^2} = \frac{I}{c^2} = 100$ lx. Osvětlení stínítka je stejné jako před vložením čočky.

β) Zlomek má maximální hodnotu, jestliže $a = \frac{3}{2}f = \frac{c}{2}$, kdy čočka leží uprostřed mezi zdrojem a stínítkem. Zde je $E = \frac{16I}{9f^2} = \frac{16I}{c^2}$. To je 16krát větší hodnota než před vložením čočky.

Přesný průběh funkce $E = E(a)$ je znázorněn grafem na obr. R3.



Obr. R3

4 body

4. a) Pohyb automobilu po vyřazení rychlostního stupně se řídí pohybovou rovnicí

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{F_0}{m} = -\frac{CS\varrho v^2}{2m} = -Kv^2. \quad (1)$$

Separací proměnných a integrací dostaneme

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t K dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = Kt, \quad \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} = Kt_1. \quad (2)$$

Z (1) a (2) odvodíme

$$K = \frac{CS\varrho}{2m} = \frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1 t_1}, \quad C = \frac{2m(v_0 - v_1)}{S\varrho v_0 v_1 t_1} = 0,93.$$

4 body

b) Z (2) odvodíme

$$v = \frac{v_0}{1 + Kv_0 t}.$$

Integrací dostaneme

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^{t_1} v dt = \int_0^{t_1} \frac{v_0 dt}{1 + Kv_0 t} = \frac{1}{K} \ln(1 + Kv_0 t_1) = \frac{v_0 v_1 t_1}{v_0 - v_1} \ln\left(1 + \frac{v_0 - v_1}{v_1}\right) \\ &= \frac{v_0 v_1 t_1}{v_0 - v_1} \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right) = 575 \text{ m}. \end{aligned}$$

3 body

c) Zvětšíme-li nákladem hmotnost automobilu na $m' = 2m$, bude platit pohybová rovnice $a = -K'v^2$, kde $K' = K/2$. Stejným postupem jako v úkolu a) dojdeme ke vztahu

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v_0} = K' t_1 = \frac{K}{2} t_1 = \frac{v_0 - v_1}{2v_0 v_1}.$$

Z toho

$$\frac{1}{v'} = \frac{v_0 - v_1 + 2v_1}{2v_0 v_1} = \frac{v_0 + v_1}{2v_0 v_1}, \quad v' = \frac{2v_0 v_1}{v_0 + v_1} = 18,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 67,5 \text{ km/h}.$$

3 body