

Řešení teoretických úloh celostátního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 3), M. Jarešová a P. Šedivý (2), B. Vybíral (4)

1. a) Náboj na kouli je $Q = 4\pi\epsilon_0 R\varphi = 111 \text{ nC}$. 1 bod

Na kyvadélko má otáčivý účinek tíhová síla F_G a elektrická síla F_e . Výsledný moment těchto sil vzhledem k bodu O při úhlové výchylce β odvodíme z obr. R1:

$$M = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 \left(2l \sin \frac{\beta}{2}\right)^2} l \cos \frac{\beta}{2} - mgl \sin \beta. \quad (1)$$

V rovnovážné poloze platí $\beta = \beta_0$, $M = 0$,

$$Qq = 32\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^3 \frac{\beta_0}{2}, \quad (2)$$

$$q = \frac{32\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^3 \frac{\beta_0}{2}}{Q} = \frac{8mgl^2 \sin^3 \frac{\beta_0}{2}}{R\varphi} = 0,54 \text{ nC}.$$

3 body

- b) V rovnovážné poloze napíná vlákno výslednice \mathbf{F} sil \mathbf{F}_G a \mathbf{F}_e , která má směr vlákna. Z podobnosti trojúhelníků na obr. R1 plyne

$$F = F_G = mg = 9,8 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

1 bod

- c) Spojením vztahů (1) a (2) dostaneme

$$M = \frac{32\pi\epsilon_0 mgl^3 \sin^3 \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} - mgl \sin \beta,$$

$$M = mgl \left(\frac{2 \sin^3 \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} - 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right).$$

Dostali jsme funkci $M = M(\beta)$, která má v bodě $\beta = \beta_0$ hodnotu $M_0 = 0$. Hledáme veličinu

$$D = \left| \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{M}{\gamma} \right| = \left| \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \frac{M - M_0}{\beta - \beta_0} \right|,$$

což je derivace funkce $M(\beta)$ v bodě β_0 .

$$\frac{dM}{d\beta} = mgl \left[\frac{\sin^3 \frac{\beta_0}{2} \left(-\sin^3 \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\beta}{2}} - \cos \beta \right] =$$

$$= mgl \frac{-\sin^3 \frac{\beta_0}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(\sin^2 \frac{\beta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) - \sin^4 \frac{\beta}{2} \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\beta}{2}}.$$

Pro $\beta = \beta_0$ dostáváme

$$\frac{dM}{d\beta} = -3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2}.$$

Pro malou úhlovou výchylku γ z rovnovážné polohy tedy platí

$$M = -3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2} \gamma = -D\gamma, \quad D = 3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2}.$$

3 body

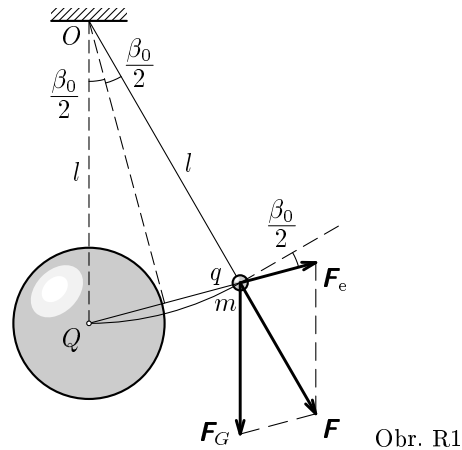
d) Periodu kmitů kyvadla určíme užitím vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}},$$

kde J je moment setrvačnosti, v našem případě $J = ml^2$, a D je direkční moment, který jsme určili v úkolu c).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2}}} = \frac{2\pi}{\cos \frac{\beta_0}{2}} \sqrt{\frac{l}{3g}} = 0,54 \text{ s}.$$

2 body



Jiné řešení úkolu c):

Položme $\beta = \beta_0 + \gamma$. Pro $\gamma \ll \beta_0$ můžeme použít aproximační vztahy:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\beta_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \cot g \frac{\beta_0}{2} \right), \quad \cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\beta_0}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right),$$

a pro $x \ll 1$ vztah

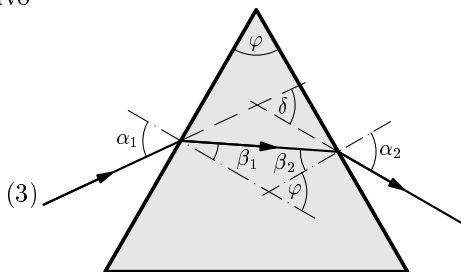
$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x.$$

Při úpravách zanedbáme členy, kde se vyskytuje γ^2 .

$$\begin{aligned} M &\approx mgl \left[\frac{2 \sin^3 \frac{\beta_0}{2} \cdot \cos \frac{\beta_0}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\beta_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \cot g \frac{\beta_0}{2} \right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \cot g \frac{\beta_0}{2} \right) \left(1 - \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right) \right] = \\ &= mgl 2 \sin \frac{\beta_0}{2} \cos \frac{\beta_0}{2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} - 2 \frac{\gamma}{2} \cot g \frac{\beta_0}{2} - \left(1 + \frac{\gamma}{2} \cot g \frac{\beta_0}{2} - \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right) \right], \\ M &= -3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2} \cdot \gamma = -D\gamma, \quad D = 3mgl \cos^2 \frac{\beta_0}{2}. \end{aligned}$$

- 2.a) Na optickém hranolu dochází k dvojitmu lomu. Podle obr. R1 platí:

$$\begin{aligned}\varphi &= \beta_1 + \beta_2, \\ \delta &= \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2, \\ \delta &= \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi.\end{aligned}\quad (3)$$



Obr. R1

Ze zákona lomu: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n$, $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n$, odkud

$$\alpha_1 = \arcsin(n \sin \beta_1), \quad \alpha_2 = \arcsin(n \sin \beta_2) = \arcsin[n \sin(\varphi - \beta_1)].$$

Po dosazení do vztahu (3) dostaneme

$$\delta = \arcsin(n \sin \beta_1) + \arcsin[n \sin(\varphi - \beta_1)] - \varphi. \quad (4)$$

Výraz je definován, jestliže

$$\sin \beta_1 < \frac{1}{n} \quad \text{a současně} \quad \sin(\varphi - \beta_1) = \sin \beta_2 < \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Úhly β_1 a β_2 musí být menší než mezní úhel pro daný index lomu n . Pokud paprsek prochází oběma lámavými stěnami, je to splněno.

2 body

- b) Hledáme minimum funkce pro $\delta(\beta_1)$, tj.

$$\frac{d\delta}{d\beta_1} = \frac{n \cos \beta_1}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta_1}} - \frac{n \cos(\varphi - \beta_1)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\varphi - \beta_1)}} = 0, \quad (6)$$

Úpravou dostaneme

$$\cos^2 \beta_1 [1 - n^2 \sin^2(\varphi - \beta_1)] = \cos^2(\varphi - \beta_1) (1 - n^2 \sin^2 \beta_1),$$

$$\cos^2 \beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1) = n^2 [\cos^2 \beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1)],$$

$$(n^2 - 1) [\cos^2 \beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1)] = 0,$$

$$\beta_1 = \varphi - \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{\varphi}{2}, \quad \beta_2 = \varphi - \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} = \beta_1.$$

Proto také $\alpha_1 = \alpha_2$. Průchod paprsku hranolem je symetrický.

2 body

Pomocí druhé derivace se přesvědčíme, že se jedná o lokální minimum. Platí

$$\frac{d^2\delta}{d\beta_1^2} = \frac{(n^2 - 1)n \sin \beta_1}{(1 - n^2 \sin^2 \beta_1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(n^2 - 1)n \sin(\varphi - \beta_1)}{[1 - n^2 \sin^2(\varphi - \beta_1)]^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

1 bod

c) Při symetrickém průchodu paprsku hranolem je

$$\delta_{\min} = 2\alpha_1 - \varphi = 2 \arcsin(n \sin \frac{\varphi}{2}) - \varphi. \quad (7)$$

1 bod

d) Při symetrickém průchodu paprsku bočními stěnami krystalků ledu je

$$\varphi = 60^\circ, \quad \beta_1 = \beta_2 = 30^\circ, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \varphi) = 41^\circ,$$

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \varphi)}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin 30^\circ} = 1,31.$$

2 body

e) Paprsek může procházet symetricky i podstavou a boční stěnou ledového hranolku. V takovém případě je

$$\varphi = 90^\circ, \quad \beta_1 = \beta_2 = 45^\circ, \quad \sin \beta_1 = \sin \beta_2 < \frac{1}{n}.$$

Podle (7) je

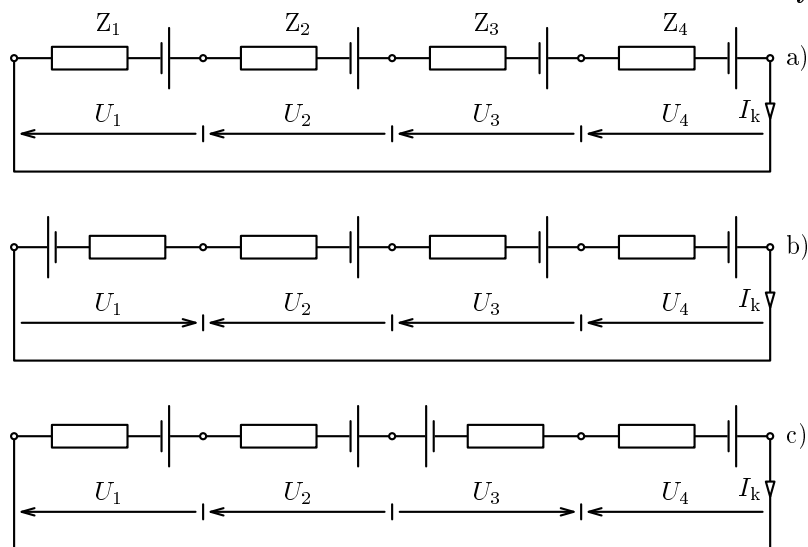
$$\gamma_{\min} = 2 \arcsin(n \sin \frac{\varphi}{2}) - \varphi = 2 \arcsin(1,31 \sin 45^\circ) - 90^\circ = 46^\circ.$$

Úhlový poloměr velkého hala je 46° .

2 body

- 3.a) Celkové napětí na všech čtyřech zdrojích je nulové, neboť volné konce jsou zkratovány přes ampérmetr. Zdroje nemohou být zapojeny podle obr. R3a. V takovém případě by napětí na všech zdrojích bylo stejné, a proto také nulové. Nulové by bylo i napětí na voltmetru. To znamená, že jeden ze zdrojů je otočen a jeho elektromotorické napětí je namířeno proti procházejícímu proudu. Jedná se buď o zdroj Z_1 (obr. R3b) nebo o některý ze zdrojů Z_2 až Z_4 , např. zdroj Z_3 (obr. R3c). Kdybychom otočili dva zdroje, celkové elektromotorické napětí by bylo nulové a obvodem by neprocházel proud.

2 body



Obr. R3

V obou zapojeních podle obr. R3b,c je celkové elektromotorické napětí sériově spojených zdrojů $2U_e$ a celkový vnitřní odpor $4R_i$. Obvodem prochází proud

$$I_k = \frac{2U_e}{4R_i} = \frac{U_e}{2R_i}. \quad (8)$$

Úloha má dvě řešení.

I. V zapojení podle obr. R3b je

$$U_1 = U_e + R_i I_k = U_e + \frac{U_e}{2} = \frac{3}{2} U_e \quad \Rightarrow \quad U_e = \frac{2}{3} U_1 = 2,0 \text{ V}. \quad (9)$$

Podle (8) je

$$R_i = \frac{U_e}{2I_k} = \frac{U_1}{3I_k} = 0,5 \Omega.$$

II. V zapojení podle obr. R3c je

$$U_1 = U_e - R_i I_k = U_e - \frac{U_e}{2} = \frac{1}{2} U_e \quad \Rightarrow \quad U_e = 2U_1 = 6,0 \text{ V}. \quad (10)$$

Podle (8) je

$$R_i = \frac{U_e}{2I_k} = \frac{U_1}{I_k} = 1,5 \Omega.$$

4 body

- b) Příkon spotřebiče připojeného k jedinému zdroji o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i je největší, jestliže jeho odpor je stejný jako vnitřní odpor zdroje. V takovém případě

$$P = P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i}.$$

K soustavě zdrojů o celkovém elektromotorickém napětí $2U_e$ a celkovém vnitřním odporu $4R_i$ musíme připojit rezistor o odporu $R = 4R_i$ a jeho příkon bude

$$P = P_{\max} = \frac{4U_e^2}{16R_i} = \frac{U_e^2}{4R_i}.$$

I. Pokud je soustava zdrojů zapojena podle obr. R3b, je

$$R = 2,0 \Omega \text{ a } P_{\max} = 2,0 \text{ W}.$$

II. Pokud je soustava zdrojů zapojena podle obr. R3c, je

$$R = 6,0 \Omega \text{ a } P_{\max} = 6,0 \text{ W}.$$

2 body

- c) Po zapojení rezistoru o stejném odporu, jako je celkový vnitřní odpor soustavy zdrojů, zmenší se proud na polovinu, tedy na $I = I_k/2 = 1,0 \text{ A}$.

I. Je-li soustava zapojena podle obr. R3b, změní se napětí na zdroji Z_1 na

$$U'_1 = U_e + R_i I = 2,5 \text{ V}.$$

II. Je-li soustava zapojena podle obr. R3c, změní se napětí na zdroji Z_1 na

$$U'_1 = U_e - R_i I = 4,5 \text{ V}.$$

2 body

4. I. Pro periodu kmitů magnetu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu_0 m H}}, \quad (11)$$

kde $J = \frac{1}{12}\pi r^2 l^3 \rho = 5,65 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

3 body

II. Pro odchylku magnetky platí

$$\text{tg } \varphi = \frac{H_1}{H} = \frac{m}{2\pi R^3 (1 - \Lambda^2)^2 H}. \quad (12)$$

Ze vztahu (11) určíme mH , ze vztahu (12) m/H . Pak

1 bod

a)

$$m = \frac{2\pi(1 - \Lambda^2)}{T} \sqrt{\frac{2\pi R^3 J \text{tg } \varphi}{\mu_0}} = 10,4 \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

2 body

b)

$$H = \frac{1}{T(1 - \Lambda^2)} \sqrt{\frac{2\pi J}{\mu_0 R^3 \text{tg } \varphi}} = 15,7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2 body

c)

$$n_{\text{celk}} = \frac{m}{\mu_B} = 1,12 \cdot 10^{24}, \quad n_{\text{Fe}} = \frac{m}{\mu_B} \frac{M_m}{\pi r^2 l \rho N_A} = 2,21.$$

2 body