

Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: M. Randa (2, 3) a P. Šedivý (1, 4)

- 1.a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R1 s počátkem ve středu tunelu, jehož vzdálenost od středu Měsíce je r_0 . Gravitační síla působící na vlak se rozkládá na tečnou složku F_1 působící ve směru tunelu a normálovou složku F_2 kolmou k tunelu. Z podobnosti trojúhelníků a vztahu (1) určíme jejich velikosti:

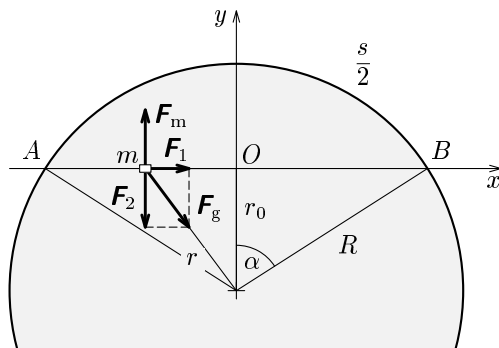
$$\frac{F_1}{F_g} = \frac{|x|}{r}, \quad F_1 = \frac{mg}{R}|x|, \quad \frac{F_2}{F_g} = \frac{r_0}{r}, \quad F_2 = \frac{mg}{R}r_0.$$

Normálová složka gravitační síly F_2 je v rovnováze s magnetickou silou F_m . Výsledná tečná složka F_1 je přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy ve středu tunelu a má opačný směr. Jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonického pohybu. Jízda ze stanice A do stanice B představuje polovinu kmitu. Platí

$$ma_x = -m\omega^2 x = -\frac{mg}{R}x, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Doba jízdy zřejmě nezávisí na vzdálenosti stanic a pro dané hodnoty je

$$\frac{T}{2} = 3256 \text{ s} \doteq 54 \text{ min.}$$



Obr. R1

4 body

- b) Nejprve určíme středový úhel $\alpha = \frac{s}{2R} = 0,575 \text{ rad}$. Počáteční zrychlení má velikost

$$a_0 = \frac{F_{g0} \sin \alpha}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha = 0,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Rychlost při průchodu rovnovážnou polohou má velikost

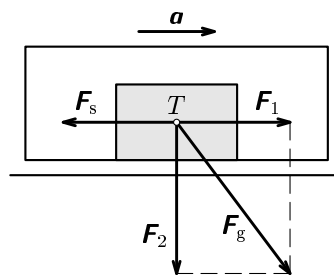
$$v_m = x_m \omega = R \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} = \sin \alpha \cdot \sqrt{Rg} = 913 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

- c) Tíhu dopravovaného tělesa určíme nejlépe v neinerciální vztažné soustavě spojené s vlakem (obr. R2). Na těleso působí vedle gravitační síly \mathbf{F}_g síla setrvačná $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a} = -\mathbf{F}_1$. Výslednice sil \mathbf{F}_g a \mathbf{F}_s je tlaková složka gravitační síly \mathbf{F}_2 , která je v rovnováze s reakcí podlahy. Tíha dopravovaného tělesa v okamžiku rozjezdu poklesne na

$$G = F_2 = mg \frac{r_0}{R} = mg \cos \alpha = 0,84mg$$

a během jízdy se nemění.



Obr. R2

3 body

2.a) Podle stavové rovnice platí $p_1 V_1 = p_4 V_4 = nRT_1$, $p_3 V_2 = p_3 V_3 = nRT_2$.

Z obrázku je zřejmé: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$, $\frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_4}$.

Porovnáním vztahů dostaneme

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2, \quad V_1 = V_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{p_4 V_4} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^2, \quad V_3 = V_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = V_2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

3 body

b) 1 → 2:

Vykonanou práci určíme z p - V diagramu jako obsah lichoběžníka (obr. R3).

$$W'_{12} = \frac{p_2 + p_1}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_2 V_2 + p_1 V_2 - p_2 V_1 - p_1 V_1).$$

Současně platí $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$, $\rightarrow p_1 V_2 - p_2 V_1 = 0$.

$$W'_{12} = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2} nR(T_2 - T_1).$$

2 → 3: $W'_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2} (V_3 - V_2) = \frac{1}{2} (p_2 V_3 + p_3 V_3 - p_2 V_2 - p_3 V_2)$.

Současně platí

$$p_2 V_2 = p_3 V_3, \quad \rightarrow p_2 V_2 - p_3 V_3 = 0, \quad p_3 = p_2 \frac{V_2}{V_3} = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

$$W'_{23} = \frac{1}{2} (p_2 V_3 - p_3 V_2) = \frac{1}{2} p_2 V_2 \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right),$$

3 → 4:

Spotřebovanou práci určíme z p - V diagramu jako obsah lichoběžníka.

$$W_{34} = \frac{p_3 + p_4}{2} (V_3 - V_4) = \frac{1}{2} (p_3 V_3 + p_4 V_3 - p_3 V_4 - p_4 V_4).$$

Současně platí $\frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_4}$, $\rightarrow p_4 V_3 - p_3 V_4 = 0$.

$$W_{34} = \frac{1}{2} (p_3 V_3 - p_4 V_4) = \frac{1}{2} nR(T_2 - T_1) = W'_{12}.$$

$$\boxed{4 \rightarrow 1:} \quad W_{41} = \frac{p_4 + p_1}{2}(V_4 - V_1) = \frac{1}{2}(p_4V_4 + p_1V_4 - p_4V_1 - p_1V_1).$$

Současně platí

$$p_4V_4 = p_1V_1, \quad \rightarrow \quad p_4V_4 - p_1V_1 = 0, \quad p_1 = p_4 \frac{V_4}{V_1} = p_4 \frac{V_2}{V_1} = p_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

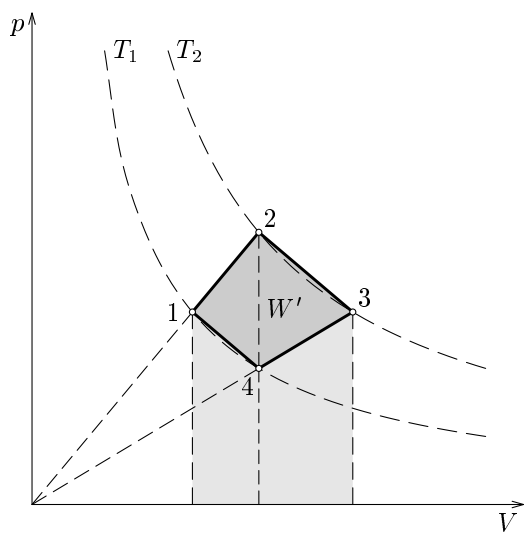
$$W_{41} = \frac{1}{2}(p_1V_4 - p_4V_1) = \frac{1}{2}p_4V_4 \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right).$$

4 body

c) Celková vykonaná práce

$$\begin{aligned} W' &= W'_{12} + W'_{23} - W_{34} - W_{41} = W'_{23} - W_{41} = \\ &= \frac{1}{2}nRT_2 \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) - \frac{1}{2}nRT_1 \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) = \\ &= \frac{nR(T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_1T_2}} = 509 \text{ J}. \end{aligned}$$

3 body



Obr. R3.

- 3.a) Je-li třetí nit napnutá, působí na každou kuličku čtyři síly, které jsou v rovnováze — síla tíhová F_G , síla elektrostatická F_e , síla závěsné niti F_2 a síla spojovací niti F_1 (obr. R4). Z podmínek rovnováhy plyne:

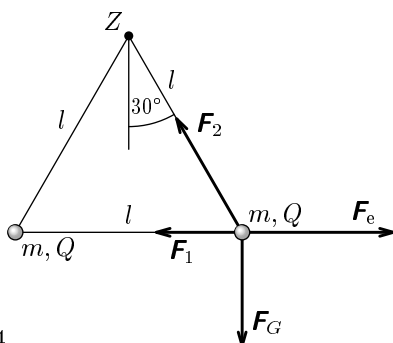
$$F_2 \cos 30^\circ = F_G, \quad F_1 + F_2 \sin 30^\circ = F_e = k \frac{Q^2}{l^2},$$

kde $k \doteq 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$. Po úpravě

$$F_1 = F_e - F_G \operatorname{tg} 30^\circ = k \frac{Q^2}{l^2} - mg \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

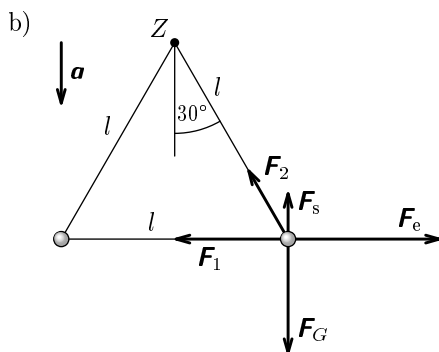
Aby spojovací nit byla napnutá, musí platit

$$k \frac{Q^2}{l^2} > mg \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad Q > l \sqrt{\frac{mg\sqrt{3}}{3k}}.$$



Obr. R4

3 body

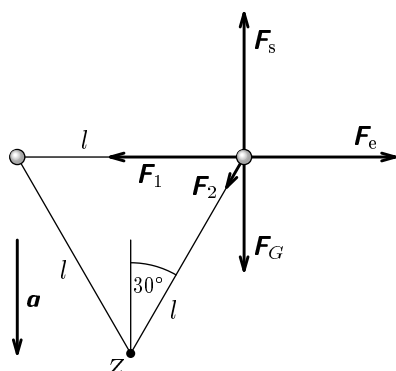


Obr. R5

V neinerciální vztažné soustavě spojené s bodem závěsu, který se pohybuje se zrychlením a orientovaným dolů, působí na kuličku setrvačná síla orientovaná proti tíhové síle. Jestliže $a < g$, nastane situace podle obr. R5 a platí

$$F_1 = k \frac{Q^2}{l^2} + m(a - g) \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2 body



Obr. R6

Když velikost zrychlení vzroste na $a > g$, soustava se překlápí podle obr. R6 a platí

$$F_1 = k \frac{Q^2}{l^2} - m(a - g) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

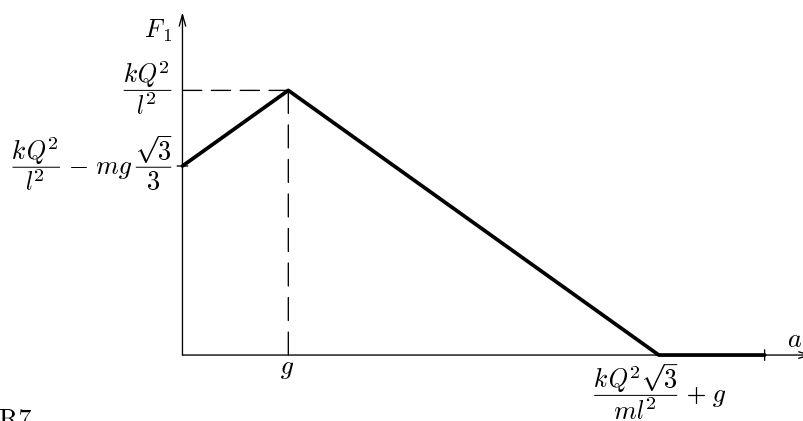
až do mezní hodnoty

$$a_m = \frac{kQ^2\sqrt{3}}{ml^2} + g.$$

Pro $a \geq a_m$ třetí nit přestane být napnutá a $F_1 = 0$.

2 body

Graf závislosti velikosti napínací síly na velikosti zrychlení je na obr. R7.



Obr. R7

3 body

- 4.a) Samotný tónový generátor si můžeme představit jako sériové spojení ideálního zdroje harmonického napětí o efektivní hodnotě U_0 a vnitřního odporu R_i . Odebíráme-li z generátoru proud I , klesne jeho svorkové napětí na

$$U = U_0 - R_i \cdot I. \quad \text{Z toho} \quad R_i = \frac{U_0 - U}{I} = 3,0 \text{ k}\Omega.$$

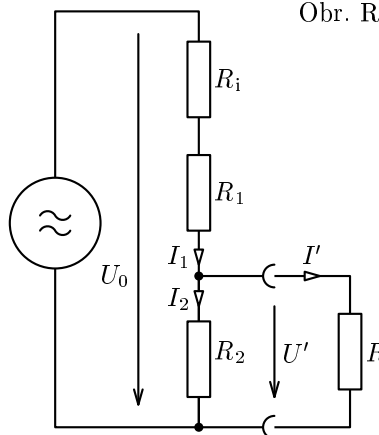
2 body

- b) Tónový generátor s děličem napětí překreslíme podle obr. R8. Označme U' napětí na výstupních svorkách děliče, jestliže z nich odebíráme proud I' . Rezistorem o odporu R_2 přitom prochází proud I_2 a generátor dodává proud I_1 . Platí:

$$I_2 = \frac{U'}{R_2}, \quad I_1 = I' + I_2,$$

$$U' + I_1(R_1 + R_i) = U_0.$$

2 body



Obr. R8

Spojením těchto vztahů a úpravami dostaneme:

$$U' + \left(I' + \frac{U'}{R_2} \right) (R_1 + R_i) = U_0,$$

$$U' = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_i} - \frac{(R_1 + R_i) R_2}{R_1 + R_2 + R_i} \cdot I'. \quad I' = U'_0 - R'_i I'.$$

Závislost svorkového napětí upraveného generátoru na odebíraném proudu je opět lineární.

3 body

- c) Podle zadání

$$U'_0 = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_i} = 100 \text{ mV}, \quad R'_i = \frac{(R_1 + R_i) R_2}{R_1 + R_2 + R_i} = 75 \Omega.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme: $\frac{R'_i}{U'_0} = \frac{R_1 + R_i}{U_0}$,

$$R_1 = \frac{U_0}{U'_0} R'_i - R_i = 4500 \Omega, \quad R_2 = \frac{U_0}{U_0 - U'_0} R'_i = 75,8 \Omega.$$

3 body